

翻修道路

有 n 个城市，用 m 条单向道路连接。

第 i 条道路的长度是 a_i ，如果对其进行翻修，则长度变为 b_i 。

1 号城市是首都，有 k 个省会城市。

你希望首都到省会城市的最短距离的最大值尽可能小，但是你不能翻修太多道路。对于所有 $x \in [0, m]$ 求出翻修 x 条道路之后最小的最大值。

输入格式

第一行三个正整数 n, m, k 。

第二行 k 个正整数，第 i 个为 p_i ，表示所有省会城市。

接下来 m 行，第 i 行四个正整数 x_i, y_i, a_i, b_i 表示 x_i 到 y_i 有一条单向道路，翻修前后长度为 a_i, b_i 。

输出格式

一行 $m + 1$ 个正整数，分别表示 $x = 0, 1 \dots m$ 时的答案。

样例输入

```
3 3 2
2 3
1 2 12 5
1 3 9 8
2 3 5 2
```

样例输出

```
12 9 7 7
```

样例解释

不翻修道路，1 到 2 的最短距离为 12，1 到 3 为 9，答案为 12。

翻修第一条道路，1 到 2 的最短距离变为 5，答案为 9。

翻修第一条和第三条道路，1 到 3 的最短距离变为 7，答案为 7。

数据范围

保证从 1 号点出发能到达所有点， $k < n$ ， $p_i \in [2, n]$ 且互不相同， $x_i, y_i \in [1, n]$ ， $1 \leq b_i \leq a_i \leq 10^5$ 。

不保证无重边自环。

$n, m \leq 100, k \leq 8$ 。

Subtask 1 (20pts) : $n, m \leq 10$ 。

Subtask 2 (20pts) : $k = 1$ 。

Subtask 3 (20pts) : $k = 2$ 。

Subtask 4 (40pts) : 无特殊限制。

时间限制: 1s。

空间限制: 256MB。

题解

对于 $n, m \leq 10$ 的数据, 枚举每条道路是否被翻修, 然后用 Dijkstra 算法求出以 1 为源点的最短路, 时间复杂度 $O(2^m \log m)$ 。

对于 $k = 1$ 的数据, 考虑分层图最短路, 将每个点 i 拆成 $m + 1$ 个点 $(i, j), j \in [0, m]$, 表示走到点 i 的时候已经经过了 j 条被翻修的道路。 (x_i, j) 向 (y_i, j) 连长度为 a_i 的边, (x_i, j) 向 $(y_i, j + 1)$ 连长度为 b_i 的边。求以 $(1, 0)$ 为源点的最短路, $x = j$ 的答案为 $(1, 0)$ 到 (p_1, j) 的最短路。 $O(m^2 \log m)$ 。

对于 $k = 2$ 的数据, 一定存在一条 1 到 p_1 的最短路和一条 1 到 p_2 的最短路, 满足存在一个点 c , 两条路径都经过了 c 且之后不存在公共点, 并且在经过 c 之前的路径相同。证明: 假设不相同, 那么这两条 1 到 c 的路径, 长度一定相同 (否则就不是最短路了), 将其中一条替换为另一条即可。以 1, p_1, p_2 为源点分别求分层图最短路 (注意以 p_1, p_2 为源点时要将所有边反向), 然后枚举 c , 再枚举 $1 \rightarrow c, c \rightarrow p, c \rightarrow p$ 上被翻修的道路数量即可。 $O(nm^3)$, 可以做到更优但没必要。

对 $k = 2$ 的情况一般化, 使用一种类似求最小斯坦纳树的 dp 求解。依次加入 1 到 p_i 的最短路, 通过对 1 到 c 的路径调整, 可以使这些最短路形成一棵以 1 为根的树。

在这棵树上从叶子到根 dp。 $f_{S,i,j}$ 表示当前子树的根是 i , 子树内翻修了 j 条道路, 子树内包含的省会城市集合是 S , i 到 S 中点的最短距离的最大值的最小值是多少。初始化 $f_{\{p_i\}, p_i, j} = 0$ 。

按照 S 从小到大的顺序 dp (保证对于 $T \subsetneq S$, T 的 dp 值在 S 之前求出)。第一种情况, 集合 S 改变, 也就是把两个根相同的子树合并成同一个,

$f_{S,i,j+l} \leftarrow \min(f_{S,i,j+l}, \max(f_{T,i,j}, f_{S-T,i,l}))$, 枚举 S 的子集即可。第二种情况, 集合 S 不变, 根从 i 变为 i' , 增加一条 i' 到 i 的边, 权值为 (a, b) ,

$f_{S,i',j} \leftarrow \min(f_{S,i',j}, \min(f_{S,i,j} + a, f_{S,i,j-1} + b))$, 发现这个转移类似最短路的三角不等式, 可以通过一次分层图最短路更新 dp 值。 $x = j$ 的答案即为 $f_{\{p_1, p_2 \dots p_k\}, 1, j}$ 。

发现复杂度瓶颈是第一种情况, 需要求形如 $c_{j+l} = \min(\max(a_l + b_j))$, 直接计算是 $O(m^2)$ 的, 注意到道路翻修后长度一定不增, 所以答案关于翻修道路条数单调不增, a, b 也单调不增,

不妨设 $b_j \geq a_l$, 那么可以取 l 为满足 $a_l \leq b_j$ 的最小值, 这样可以最小化翻修的道路数量, 然后再对 c 取一遍前缀 \min , 就可以 $O(m)$ 计算。 $O(2^k m^2 \log m + 3^k nm)$ 。