古代の機械 2 (解説)

Author : 星井 智仁

はじめに

この解説では満点解法に関わる解法のみ紹介しますが，満点には結びつかないながらも良い解を得られる方法がいくつか存在します．

以下，すべて 0 オリジンで表記するので注意してください．また，「機械の記憶領域に設定されている値」のことを「状態」と表記します．

$M = 1002$ （10 点）

i 番目の文字を $m = i + 3$ で得ることができます．具体的には以下のように構築します．

$$(a_j, b_j) = \begin{cases} (j+1, j+1) & 0 \leqq j \leqq i-1 \\ (i+1, i+2) & j = i \\ (j, j) & j = i+1, i+2 \end{cases}$$

最終的な状態が $i+1$ であれば i 番目の文字は '`0`'，$i+2$ であれば i 番目の文字は '`1`' です．

$N = 1000$ なので，この方法で前から順々に 1 つずつ文字が 0 であるかを調べていくと $M = 1002$ となります．

$M = 1001$ （10 点）

後ろから $|T|$ 文字について，文字列 S が文字列 T と一致しているか否かを $m = |T| + 1$ で判定することができます．

例えば，$T =$"`101`" であるとき，次のように構築します．

- $a = [0, 2, 0, 2]$
- $b = [1, 1, 3, 1]$

現在の状態が i であるとき，現在 T の $i - 1$ 文字目まで一致していることを表します．

最終的な状態が $|T|$ であれば末尾が T と一致しており，そうでない場合末尾が $|T|$ と一致していなことが

わかります．

この方法を用いて末尾から順に調べていくと，$M = 1001$ となります．

$M = 502$ (37 点)

前半の 500 文字について前述した $M = 1002$ 解法，後半の 500 文字について前述した $M = 1001$ 解法を用いて調べることで $M = 502$ とすることができます．

$M = 114$ (97 点)

線形代数を用いることで $M = 114$ が達成できます．

1000 個の未知数があるため，それぞれの式が一次独立である 1000 元 1 次方程式を作ることを目標にします．ここで，それぞれの未知数は 0 あるいは 1 であることがわかっているため， mod 2 で考えても解を得ることができます．

具体的には，以下のようにします．

$i \equiv q \pmod{p}$ であるすべての i についての S_i の和（を 2 で割ったあまり）を $m = 2p$ で得ることができます．ここで，p と q を選んだときに決まるベクトル（例えば $p = 3$，$q = 1$ ならば $[0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \ldots]$）が一次独立となるように掃き出し法などを用いて p と q を選んでいきます．

$p \leqq 57$ の範囲で一次独立であるベクトルを 1000 個取ることができます．そのため，$M = 114$ となります．

$M = 102$ (100 点)

$M = 114$ 解法と $M = 502$ 解法を組み合わせると $M = 102$ を達成することができます．

ある文字の情報を得るというのは，ベクトル $[0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$ を選ぶのと等しいです．

長さ 102 以内で先頭の 100 個の文字，末尾の 101 個の文字を知ることができます．これにより，201 個のベクトルを得ることができます．これに加えて，$p \leqq 51$ の範囲でこれらとも一次独立であるベクトルを 799 個得ることができます．これより，$M = 102$ となります．