セルオートマトン

Author : 米山 瑛士

小課題 1

問題文に示された規則に従って，$-100 \leqq x, y \leqq 100$ の範囲のマス (x, y) について時刻 t $(0 \leqq t \leqq 50)$ での色を求めれば良いです．

小課題 2

はじめ黒色のマスからの最短距離が t であるようなマスは黒色，$t-1$ であるようなマスは灰色，それ以外のマスは白色です．したがって，その最短距離を $-2000 \leqq x, y \leqq 2000$ の範囲のマス (x, y) について BFS で求めれば良いです．

証明

数学的帰納法により示す．
$t = 0$ で成り立つ．
時刻 t で成り立つとき，

- $d > t+1$ であるようなマスは元々白色で，現在黒色のマス（最短距離が t であるようなマス）と隣接しないため，時刻 $t+1$ で白色
- $d = t+1$ であるようなマスは元々白色で，現在黒色のマス（最短距離が t であるようなマス）のいずれかに隣接しているため，時刻 $t+1$ で黒色
- $d = t$ であるようなマスは元々黒色であるため，時刻 $t+1$ で灰色
- $d = t-1$ であるようなマスは元々灰色であるため，時刻 $t+1$ で白色
- $d < t-1$ であるようなマスは元々白色で，現在黒色のマス（最短距離が t であるようなマス）と隣接しないため，時刻 $t+1$ で白色

であり時刻 $t+1$ でも成り立つ．

小課題 3

X の昇順にソートし，隣の正方形との関係を以下のように分類して，各部分の答えへの寄与を調べれば良いです．

- まだ衝突していない
- (x の差が偶数のとき) ちょうど衝突した所である
- 衝突後である

計算量は $O(QN \log N)$ です．

小課題 4

小課題 3 での分類において，それぞれのタイプで答えへの寄与は t の一次関数で表されます．したがって，分類が変化する時刻とそのときの一次関数の変化分を事前に求めておき，t の昇順に走査しながら現在の答えを表す t の一次関数を更新して行けば良いです．計算量は $O(N \log N + Q)$ です．

小課題 5

正方形の各辺の答えへの寄与を計算します．各辺には，残っているマス $(X_i + p, Y_i + q)$ について，他の各正方形から，「時刻 t_0 以降で $|p| \leqq a$ である」や「時刻 t_0 以降で $|q| \leqq a$ である」といった制約がかかります．

各辺について，各正方形からかかるこれらの制約を計算し，時刻 t で条件を満たすマスの個数（答えへの寄与）を求めれば良いです．計算量は $O(QN^2)$ です．

小課題 6

各辺について，制約が追加される時刻 (小課題 5 での制約における t_0) と条件を満たすマスの個数が 0 になる時刻を区切りとして，答えへの寄与は t の一次関数です．したがって，これらの時刻と一次関数の変化分を事前に求めておき，t の昇順に走査しながら現在の答えを表す t の一次関数を更新して行けば良いです．計算量は $O(N^2 + Q)$ です．

満点

一旦，$x, y, x+y, x-y$ が等しい正方形のペアが存在しないものとして考えます．
各辺の答えへの寄与を表す t の一次関数が変化するのは，

- ある正方形の角がある別の正方形に当たって消えたとき，それらの正方形の辺が削られる
- ある辺が，両端から別の正方形に削られることによって完全に消えたとき，それらの正方形の辺が衝突して削られる

という状況に限られます．どちらも起こる回数は $O(N)$ 回です．

一つ目の場合は，セグメント木などを持って 8 回程度平面走査をすることで $O(N \log N)$ で列挙できます．二つ目の場合は，各辺について一つ目の場合の結果を用いて計算すれば良いです．

$x, y, x+y, x-y$ が等しい正方形のペアが存在する場合にも，同様の処理を行うことで答えを求めることができます．計算量は $O(N \log N + Q)$ です．