庭園 (解説)

Author : 渡邉 雄斗

全般的な考察

以下，あるマスが (x, y) と表されるとき，この x, y の値のことをそれぞれ x 座標，y 座標と表記します．また，庭の位置を決定する a, b, c, d のことをそれぞれ左端，右端，上端，下端とよびます．

マス (x, y) と $(x + d, y)$ およびマス (x, y) と $(x, y + d)$ には全く同じオブジェが置かれているので，庭の横幅も縦幅も d を超えるメリットはありません．よって，$0 \leqq x < d, 0 \leqq y < d$ の範囲の 2 次元トーラス（すなわち，$x = 0$ と $x = d - 1$ が左右に，$y = 0$ と $y = d - 1$ が上下に隣接していると考える）上でこの問題を考えることができます．すると，タイプ A のオブジェに関する条件は $a \leqq P_i \leqq b$ かつ $c \leqq Q_i \leqq d$，タイプ B のオブジェに関する条件は $a \leqq R_j \leqq b$ または $c \leqq S_j \leqq d$ になります．

小課題 1 (15 点)

条件に「または」が入っていると厄介なので，これを取り除くことを考えます．タイプ B のオブジェそれぞれについて $a \leqq R_j \leqq b$ と $c \leqq S_j \leqq d$ のどちらの条件を満たすか全探索すると，庭に関するすべての条件が「かつ」で並列された状態になります．すると，x, y 座標それぞれについて次の問題（以下問題 X とよびます）を解けばよいことになります．

- 0 から $d - 1$ までの数が円環上に並んでおり，この円環上で区間を 1 つ選びたい．ただしいくつかの数については必ず区間に含まれる必要がある．区間の幅の最小値を求めよ．

この問題 X は $O(D)$ で解くことができるので，全探索と合わせて $O(N + 2^M D)$ で本問題を解くことができます．

小課題 2 (6 点)

左，右，上，下端を全探索し，$N + M$ 個のオブジェすべてについて条件を満たすか判定すればよいです．計算量は $O(D^4(N + M))$ です．

小課題 3 (8 点)

左，右，上端を固定すると，$N+M$ 個のオブジェそれぞれについて「下端は○○以上でなければならない」という形の条件がでてくるので，最適な下端の値は簡単に求まります．計算量は $O(D^3(N+M))$ です．

小課題 4 (16 点)

左，右端を固定した上で，$N+M$ 個のオブジェそれぞれについて上，下端に関する条件を求めると，結局 y 座標について問題 X を解けばよいことになります．計算量は $O(D^2(D+N+M))$ です．

小課題 5 (30 点)

右端を固定した上で，左端を b から 1 ずつ減らしていきます．すると，問題 X において

- 「必ず区間に含まれる必要がある数」が 1 つ減るクエリ
- 条件を満たす区間の幅の最小値を求めるクエリ

のいずれかが次々と与えられる，いわば動的な問題 X を解く必要があります．これは連結リストのようなデータ構造を用いることで各クエリ $O(1)$ で処理することができます．

左端をずらしたときに，そのずらしによって影響をうけるオブジェだけを見ることにすれば，1 回の右端の固定において各オブジェが見られる回数は高々 1 回です．よって，計算量 $O(D(D+N+M))$ で本問題を解くことができます．

小課題 6 (25 点)

小課題 5 ではずらしによって影響をうけるオブジェをすべて見ていましたが，「必ず区間に含まれる必要がある数」が 1 つ減るようなオブジェだけを見ることができれば計算量は $O(D^2+N+M)$ に改善します．そしてこれは，右端を全探索する（具体的には 0 から 1 ずつ増やしていく）過程において，

- 各 y に対する，$S_j = y$ を満たすタイプ B のオブジェにおける R_j の最小値

をうまく管理することによって実現可能です．