《没有创意的题目名称》解题报告

宁波市镇海中学 施开成

题目来源

本题想法来源于 IMO2022 预选题 A8，有所改编。

题目大意

给定一个正整数 n 和一个长度为 $n+1$ 的序列 $lim_0, lim_1, lim_2, \ldots, lim_n$，求长度为 $n+1$ 的整数序列 $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ 的方案数，使得以下条件成立：

- 对于所有 $0 \le i \le n$，有 $0 \le f_i \le lim_i$。
- 对于任意 $0 \le m \le n$ 满足，对于所有 $0 \le i \le m$，有 $f_{f_i + f_{m-i}} = f_m$。（当 $i > n$ 时，$f_i = -1$）

答案对 998244353 取模。

数据范围

对于 100% 的数据，有 $1 \le n \le 2000, 0 \le lim_i \le n$。

共 20 个测试点，各个测试点的数据范围如下：

测试点编号	$n \le$	其他约束
1	1	无
2	5	无
3	15	无
4	30	无
5	50	无
6	70	无
7	100	无
8	200	无
9	100	$lim_0 = 0$
10	500	$lim_0 = 0$
11	2000	$lim_0 = 0$
12	2000	$lim_0 = 0$ 且 $lim_i \le 5$
13	2000	$lim_i \le 5$
14	2000	$lim_i \le 20$
$15 \sim 16$	2000	$lim_i = i$
$17 \sim 20$	2000	无

解题过程

本题不需要运用高级算法，主要考察选手的观察和思维能力。由于第二个条件和 $\forall i + j \le n, f_{f_i + f_j} = f_{i+j}$ 是等价的，因此之后可能会使用这一形式的条件。

算法一

爆搜，暴力枚举 f 序列的每一位并判断可行性，复杂度 $O\left((n+1)^{n+1} \operatorname{poly}(n)\right)$。可以通过测试点 $1, 2$，期望得分 10。

算法二

在爆搜时，假如我们已经搜索出了 f_i 和 f_j 的值，若 $i + j \le n$，则令 $m = i + j$ 后会得到等式 $f_{f_i + f_j} = f_m$。我们可以用并查集维护这样的等式，从而优化搜索过程。可以通过测试点 $1 \sim 4$，期望得分 20。

算法三

注意到题目给出的限制条件其实很强，我们可以考虑从中挖掘一些性质。

令记号 $i \equiv j$ 表示 $f_i = f_j$，则根据题目给出的条件，有对于 $\forall i + j \le n, f_i + f_j \equiv i + j$，显然该记号是一种等价关系。因此，若 $i_1 \equiv i_2, j_1 \equiv j_2, i_1 + j_1 \le n, i_2 + j_2 \le n$，则有 $i_1 + j_1 \equiv f_{i_1} + f_{j_1} \equiv f_{i_2} + f_{j_2} \equiv i_2 + j_2$。

因此，对于 $i, j \le n - 1$，有 $f_i = f_j \Rightarrow f_{i+1} = f_{j+1}$。这意味着，当 f 中有两个元素相同时，就会形成循环节（可能不完整）。形式化地，我们有以下结论：

存在正整数 q, k，满足 $k \le q$，$f_0, f_1, \ldots, f_{q-1}$ 互不相同，且对于 $q \le i \le n$ 有 $f_i = f_{i-k}$。

可以利用这一性质，分别枚举循环节和循环节前内容，从而优化枚举时间。可以通过测试点 $12, 13, 15, 16$，如果推导出其他剪枝手段则可能通过测试点 $5, 6, 7, 8, 9, 14$，期望得分 $40 \sim 70$。

算法四

我们考虑推出更多性质。为了方便，我们把"对于所有 $0 \le i \le n$，有 $0 \le f_i \le lim_i$"称作条件一，把"对于任意 $0 \le i, j \le n$ 且 $i + j \le n$，有 $f_i + f_j \le n$"称作条件二，把"对于任意 $0 \le i, j \le n$ 且 $i + j \le n$，有 $f_{f_i + f_j} = f_{i+j}$"称作条件三。可以证明这三个条件与题目中的条件等价。

假如 $f_0, f_1, \ldots, f_n$ 两两不同，则 $i \equiv j$ 可以推出 $i = j$，因此 $f_i + f_j = i + j$，则有唯一解 $f_i = i$。

在存在相同元素的前提下，令 p 表示最小的满足 $\exists q, p < q \le n, f_p = f_q$ 的数，q 表示最小的满足 $f_q = f_p$ 的数。则根据算法三中的结论，$f_p \sim f_{q-1}$ 构成 $f_p \sim f_n$ 的最小循环节，循环节长度 $k = q - p$，且 $f_0, f_1, \ldots, f_{q-1}$ 互不相同。

分类讨论，先考虑 $f_0 = 0$ 的情形。

则有 $f_{f_i + f_0} = f_{i+0}$，即 $f_i \equiv i$。如果 i 满足 $0 < i < p$，则不存在 $j \ne i$ 使得 $f_i = f_j$，这意味着可以从 $f_i \equiv i$ 得出 $f_i = i$。这样我们就得到了对于 $0 \le i < p$，都有 $f_i = i$。而对于 $p \le i < q$，$f_i \equiv i$ 意味着 $f_i \ge i$ 且 $k \mid (f_i - i)$。此时，对于所有的 $0 \le i \le n$，都有 $i \equiv f_i \pmod k$。

可以发现，在此基础上，只要条件二成立，则条件三必然成立（证明：当 $i + j < p$ 时，$f_{f_i + f_j} = f_{i+j}$；当 $i + j \ge p$ 时，$f_{f_i + f_j} = f_{(i + t_1 k) + (j + t_2 k)} = f_{i+j}$）。因此我们考虑条件二带来的限制。

进一步分类讨论，当 $q - 1 \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 时，对于任意 $p \le i < q$ 有 $f_i + f_i \le n$，即 $f_i \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。这也意味着对于任意 $0 \le i \le n$，有 $f_i \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，显然条件二成立。

当 $q - 1 > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 时，对于 $p \le i \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，有和上文一样的 $f_i \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，而 $i + k \ge q > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，因此必然有 $f_i = i$。这也意味着对于所有的 $0 \le i \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，都有 $f_i = i$。对于 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i < q$，有 $f_i + f_{n-i} \le n$，而 $f_{n-i} = n - i$，因此 $f_i \le i$，则必然有 $f_i = i$。与上一个结论合并，可得 $\forall 0 \le i < q, f_i = i$。

综上所述，当 $f_0 = 0$ 时，可以枚举 p, q，有 $\forall i < p, f_i = i$。当 $q - 1 \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 时，对于 $p \le i < q$，有 $f_i = i + tk$ 且 $f_i \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$；当 $q - 1 > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 时，对于 $p \le i < q$，有 $f_i = i$。

可以证明上述限制可以推出条件二和条件三。加上条件一后，可以先枚举 $k = q - p$，然后枚举 p，方案数即为 $p \sim q - 1$ 位置的 f_i 填法的乘积。相当于求出一段数的连乘，预处理逆元后，可以 $O(n^2)$ 计算。

接着考虑 $f_0 > 0$ 的情形。

由条件三可得 $f_{f_0+f_0} = f_0$，即 $f_{2f_0} = f_0$。由于 $f_0 > 0$，因此 $2f_0 \neq 0$，这意味着存在 $i > 0$ 使得 $f_i = f_0$，所以循环节从 0 开始，即 $p = 0, q = k$。

$f_{2f_0} = f_0$ 意味着 $k \mid 2f_0$，考虑再次分类讨论。当 $k \mid f_0$ 时，有 $f_0 \geq k$。而条件二要求 $f_0 + f_0 \leq n$，因此 $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。与之前类似，条件二使得对于 $0 \leq i < k$，有 $f_i + f_i \leq n$，故所有 $0 \leq i \leq n$ 都有 $f_i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。可以证明，条件三等价于 $f_i \equiv i \pmod k$。因此，这一部分可以通过先枚举 k，然后把 $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$ 的方案数相乘来计算总方案数，方法与之前类似，复杂度 $O(n^2)$。

当 $k \nmid f_0$ 时，$k \mid 2f_0$ 意味着 $2 \mid k$ 且 $\frac{k}{2} \mid f_0$，因此 $f_0 \equiv \frac{k}{2} \pmod k$。考虑条件三，有 $f_{f_0+f_i} = f_{0+i}$，即 $f_0 + f_i \equiv i$，故 $f_0 + f_i \equiv i \pmod k$，所以 $f_i \equiv i + \frac{k}{2} \pmod k$。代入 $i = \frac{k}{2} - 1$，有 $f_{\frac{k}{2}-1} \equiv k - 1 \pmod k$，因此 $f_{\frac{k}{2}-1} \geq k - 1$。考虑条件二，有 $f_{\frac{k}{2}-1} + f_{\frac{k}{2}-1} \leq n$，因此 $2(k-1) \leq n$，即 $k - 1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。根据条件二，对于 $0 \leq i < k$，都有 $f_i + f_i \leq n$，即 $f_i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，因此所有 $0 \leq i \leq n$ 都有 $f_i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。因此，这一部分与之前相同，也可以先枚举 k 再把 $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$ 的方案数相乘来计算总方案数，复杂度 $O(n^2)$。

分类讨论结束，总复杂度 $O(n^2)$，期望得分 100。

参考资料

[1] IMO2022 Shortlisted Problems with Solutions, https://www.imo-official.org/problems/IMO2022SL.pdf.