

题目描述

给定 n , 对于每组 $x, y \in [0, n)$ 求出有多少个 $1 \sim n$ 的排列 p 满足以下条件:

- $\sum_{i=1}^{n-1} [p_i < p_{i+1}] = x$.
- $\sum_{i=1}^{n-1} [p_i^{-1} < p_{i+1}^{-1}] = y$.

答案对给定的质数 MOD 取模。

数据范围

对于 100% 数据, $1 \leq n \leq 500, 10^9 \leq MOD \leq 1.01 \times 10^9$, 保证 MOD 为质数。

Subtask 1(10%) : $n \leq 8$ 。

Subtask 2(15%) : $n \leq 16$ 。

Subtask 3(25%) : $n \leq 40$ 。

Subtask 4(25%) : $n \leq 100$ 。

Subtask 5(25%) : 无特殊限制。

题解

分别钦定 p, p^{-1} 中的 i, j 个上升, 计算其方案数 $f_{i,j}$ 。对两维分别进行 $O(n^3)$ 的容斥即可得到答案。

i 个上升相当于 $n - i$ 个非空上升段。

依次加入 p^{-1} 中的每个上升段, 类似于从小到大地将每个数填入 p 。那么任意时刻 p 的每个上升段中已经被填入的应当是一段前缀。

因此我们设 $a_{k,l}$ 表示加入 p^{-1} 中的第 k 上升段时在 p 中的第 l 个上升段中填入了 $a_{k,l}$ 个数。如果确定了所有 $a_{k,l} (k \in [1, n - i], l \in [1, n - j])$ 则可以唯一确定 p 。

我们对 $a_{k,l}$ 的限制为: 总和为 n , 并且不能存在一行或一列全为 0, 否则会导致 p 或 p^{-1} 中某个上升段为空。

对这个限制再进行一次容斥, 即钦定部分行列全为 0。依然对两维分别进行 $O(n^3)$ 的容斥即可得到答案。

总时间复杂度 $O(n^3)$ 。

参考资料

与柯绎思、柯悻憬、叶子川同学的讨论。