《物理实验》解题报告

华东师范大学第二附属中学　柯绎思

1　题目描述

物理实验室中有一个长度为 M 的环形装置，上面放有 N 个磁铁，第 i 个磁铁在原点沿顺时针方向走 x_i 个单位长度的位置上。

每经过一个时刻，每一个磁铁都会独立地以 p 的概率顺时针移动 0.5 个单位长度，以 $1-p$ 的概率逆时针移动 0.5 个单位长度。任意时刻，如果两个磁铁的位置相同了，它们就会吸在一起（大小变化忽略不计），之后的运动会同步（也就是以 p 的概率同时顺时针移动，以 $1-p$ 的概率同时逆时针移动）。

定义两个磁铁的距离为环上两个方向中距离的较小值。设 f_i 表示经过 i 个时刻之后，每一对磁铁（共 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对）的距离之和的期望。给定 L, R，求出 $f_L, f_{L+1}, \cdots, f_R$。答案对 998244353 取模。

2　数据范围

对于所有数据，满足 $1 \le N \le 10^5$，$3 \le M \le 10^5$，$1 < p < 998244353$，$1 \le L \le R \le 10^9$，$R - L + 1 \le 10^5$，$0 \le x_i < M$。

子任务编号	分值	$N \le$	$M \le$	$R \le$	$R-L+1 \le$
1	5	7500	7500	M	10^5
2	5	10^5	7500	M	10^5
3	10	10^5	7500	10^9	1
4	15	10^5	7500	10^9	10^5
5	15	10^5	5×10^4	M	1
6	15	10^5	5×10^4	M	10^5
7	5	10^5	5×10^4	10^9	1
8	10	10^5	10^5	10^9	1
9	10	10^5	5×10^4	10^9	5×10^4
10	10	10^5	10^5	10^9	10^5

3 解题过程

算法 1

注意到每一对磁铁是独立的。称一对磁铁 i,j 的相对距离为 $x_i - x_j$，则每一轮操作后，相对距离有 $p(1-p)$ 的概率加一，$p(1-p)$ 的概率减一，$1-2p(1-p)$ 的概率不变。如果相对距离变为 0 或 M，就代表它们吸在一起。最终若相对距离为 i，则对答案的贡献为 $b_i = \min(i, M-i)$。

现在令 $p \leftarrow p(1-p), M \leftarrow M-1$。对于 $i = 1, 2, \cdots, M$ 求出 a_i 表示相对距离为 i 的磁铁对数。

问题转化为初始有 a_i 个球在 $(0,i)$ 的位置上，每一轮若一个球在 (x,y) 上，则其有 p 的概率走到 $(x+1,y-1)$，有 p 的概率走到 $(x+1,y+1)$，有 $1-2p$ 的概率走到 $(x+1,y)$，且走的过程中纵坐标不能超出 $1 \sim M$ 的范围。

设 $DP(x,y)$ 表示所有球走到 (x,y) 的概率之和，则 $f_n = \sum_{i=1}^{M} b_i DP(n,i)$，直接计算的复杂度为 $\mathcal{O}(MR)$，可以通过子任务 1、2，期望得分 10。

算法 2

所求的式子可以表示为 $f_n = u^T A^n v$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1-2p & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p & 1-2p & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-2p & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p & 1-2p \end{pmatrix}_{M \times M}$$

$\{f_i\}$ 是一个 M 阶线性递推，其递推式就是 A 的特征多项式。

记 $P_n(x)$ 为 $n \times n$ 的这样的矩阵的特征多项式，则 $P_n(x) = (x+2p-1)P_{n-1}(x) - p^2 P_{n-2}(x)$，因此

$$\begin{pmatrix} P_n \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 & x+2p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ P_n \end{pmatrix}$$

直接使用矩阵快速幂 + NTT 计算 P_M，就能 $\mathcal{O}(M \log M)$ 计算出 A 的特征多项式。

还是 $\mathcal{O}(M^2)$ 计算 $f_0, f_1, \cdots, f_{M-1}$，之后使用线性递推计算远处的一项，可以通过子任务 1、2、3，期望得分 20。

算法 3

先考虑怎么 $\mathcal{O}(M\log M\log R+(M+R-L)\log(M+R-L))$ 计算远处 $L\sim R$ 项。可以先计算出前 $M+R-L$ 项，并计算出 $G(x)=x^L \bmod F(x)$，其中 $F(x)$ 为 $\{f_i\}$ 的递推式，然后就有 $f_{L+i}=\sum_{j=0}^{M-1}[x^j]G(x)f_{i+j}$，使用一遍卷积就可以计算。

还有一个常数更小的做法，把递推数列看成 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的每一项，考虑怎么计算 $\dfrac{1}{Q(x)}$ 的 $l\sim r$ 次项。记 $\mathfrak{V}_{l,r}(F(x))=\sum\limits_{i=l}^{r}x^{i-l}[x^i]F(x)$。

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{V}_{l,r}\left(\frac{1}{Q(x)}\right)&=\mathfrak{V}_{l,r}\left(Q(-x)\cdot\frac{1}{Q(x)Q(-x)}\right)\\
&=\mathfrak{V}_{\deg Q,r-l+\deg Q}\left(Q(-x)\cdot\mathfrak{V}_{l-\deg Q,r}\left(\frac{1}{Q(x)Q(-x)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

注意到 $Q(x)Q(-x)$ 为偶函数，设其为 $\hat{Q}\left(x^2\right)$，则计算 $\mathfrak{V}_{l,r}\left(\dfrac{1}{\hat{Q}\left(x^2\right)}\right)$ 时只用计算 $\mathfrak{V}_{\lceil\frac{l}{2}\rceil,\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\left(\dfrac{1}{\hat{Q}(x)}\right)$。

结合算法 2，可以通过子任务 1、2、3、4，期望得分 35。

算法 4

优化计算 $f_0,f_1,\cdots,f_{M-1}$ 的过程，先考虑怎么计算 f_{M-1}。

设 $G(i)$ 表示不考虑边界的限制，从 $(0,0)$ 走到 $(M-1,i)$ 的概率，则 $G(i)=[x^i]\left(\frac{p}{x}+(1-2p)+px\right)^{M-1}$。

先计算从 $(0,i)$ 走到 $(M-1,j)$ 的概率，可以反射容斥。由于走的步数不多，不可能同时超出上边界和下边界，因此答案就是 $G(j-i)-G(j-(-i))-G(j-(2M+2-i))$。

现在可以计算出 c_i 表示每一个 $G(i)$ 的贡献。具体地，对于每一对 i,j：

- $c_{j-i}\leftarrow c_{j-i}+a_ib_j$
- $c_{i+j}\leftarrow c_{i+j}-a_ib_j$
- $c_{i+j-2M-2}\leftarrow c_{i+j-2M-2}-a_ib_j$

$\{c_i\}$ 可以通过两次卷积得出，$f_{M-1}=\sum\limits_i c_i[x^i]\left(\frac{p}{x}+(1-2p)+px\right)^{M-1}$。可以通过子任务 5。结合算法 2、3，期望得分 50。

算法 5

现在计算出所有 $f_0, f_1, \cdots, f_{M-1}$，依据算法 4，

$$f_i = \sum_j c_j \left[x^j\right] \left(\frac{p}{x} + (1-2p) + px\right)^i$$

记 $H(x) = \frac{p}{x} + (1-2p) + px$，这可以看成

$$\begin{pmatrix} \left[x^{-M+1}\right] H^0(x) & \cdots & \left[x^{M-1}\right] H^0(x) \\ \left[x^{-M+1}\right] H^1(x) & \cdots & \left[x^{M-1}\right] H^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[x^{-M+1}\right] H^{M-1}(x) & \cdots & \left[x^{M-1}\right] H^{M-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-M+1} \\ c_{-M+2} \\ \vdots \\ c_{M-1} \end{pmatrix}$$

考虑转置原理，转化为计算

$$\begin{pmatrix} \left[x^{-M+1}\right] H^0(x) & \cdots & \left[x^{-M+1}\right] H^{M-1}(x) \\ \left[x^{-M+2}\right] H^0(x) & \cdots & \left[x^{-M+2}\right] H^{M-1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[x^{M-1}\right] H^0(x) & \cdots & \left[x^{M-1}\right] H^{M-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{M-1} \end{pmatrix}$$

也就是 $\sum\limits_{i=0}^{M-1} d_i \left(\frac{p}{x} + (1-2p) + px\right)^i$ 的每一项，可以分治 NTT 解决，这部分复杂度为 $\mathcal{O}(M \log^2 M)$，可以通过子任务 1、2、5、6。

结合算法 2、3，可以通过所有子任务，总复杂度为 $\mathcal{O}(M \log M (\log M + \log N) + (M + R - L) \log(M + R - L))$，期望得分 100。

4 总结

本题有一些与正解无关的做法也能解决若干子任务，获得一定的分数。

本题主要考察了特征多项式、线性递推、容斥、转置原理以及多项式相关内容，大部分步骤较为经典，考察了选手的基本功。

5 参考资料

本题出题过程中有过与集训队员柯怿憬的讨论。