

给定 n, k , 设 p 是一个 n 阶排列, 你可以将 p 划分成恰好 k 个非空连续段 (也即, 选择 $k-1$ 个断点 $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < n$, 令划分为 $[1, x_1], (x_1, x_2], \cdots, (x_{k-1}, n]$), 然后将每段内部的数从小到大排序, 得到一个新的排列 q 。

定义 $f(p)$ 表示, 所有划分方案里可能得到的 q 中字典序最小的那一个。

现在给定一个 n 阶排列 q , 求有多少个 n 阶排列 p 的 $f(p) = q$ 。请输出答案模 998244353 的值。

$n \leq 500, 1 \leq k \leq n$ 。

先考虑 $q = (1, 2, \cdots, n)$ 怎么做。考虑将 p 划分成极小的值域连续段, 设连续段有 $\text{divcnt}(p)$ 个, 则 $\text{divcnt}(p) \geq k$ 是 $q = (1, 2, \cdots, n)$ 的充要条件。

因此, 先求出 f_n 表示有多少个 n 阶排列 p 的 $\text{divcnt}(p) = 1$ 。考虑容斥, 枚举第一段值域连续段的长度, 则有

$$f_n = n! - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(n-i)!$$

令 $F(x) = \sum_i f_i x^i$, 则所求即为 $\sum_{i \geq k} [x^n] F^i(x)$ 。

再考虑 q 不有序的情况, 令 $t = \min\{i : 1 \leq i < n, q_i > q_{i+1}\}$, 则 t 一定是一个断点, 令其为 x_c 。再令 $t' = x_{c+1}$, 则断点集合必为 $\{x_1, \cdots, x_c, t', t' + 1, t' + 2, \cdots, n\}$ 。也即, t' 后的每一段必为单点。因为, 如果存在一个长度大于 1 的段, 则可以考虑将这一段任意劈成两段, 再将第 c 段和第 $c+1$ 段合并。这样调整后的段数不变, 并且得到的 $f(p)$ 更小。

同时, 考虑 $(t, t']$ 中的所有数, 一定只有 q_{t+1} 这一个数 $< q_t$ 且 $q_{t+1} = p_{t'}$, 而该段中的其余数都大于 q_t 。否则, 将 x_c 改为 $t' - 1$ 后得到的 $f(p)$ 更小。

另一方面, 不难发现, 只要上述条件都满足, 必有 $f(p) = q$ 。于是我们只需对这样的结构计数。

有了上述观察后，不难发现，合法的 (t, t') 只有 $O(n)$ 种，且答案也只与 (t, t') 有关。考虑固定 $x_c = t, x_{c+1} = t'$ 后如何计算。

首先，总段数为 $c + 1 + n - t' = k$ ，因此有 $c = k + t' - n - 1$ 。对于 $[t + 1, t']$ 而言，唯一的限制是固定了 $p_{t'} = q_{t+1}$ 。而 $[t' + 1, n]$ 内的数则与 q 保持不变。

因此，答案即为

$$[x^t]F^c(x)(t' - t - 1)!$$

最后，将所有 (t, t') 的贡献相加即为答案。

感谢郭羽冲、柯绎思、柯怿憬同学为我命题上提供的帮助。