

题目：给出 n 个点， m 条边的有向图，边带权。给定 k ，对图上的每个点 i ，求从 1 走 k 步到 i 的任意路径上边权之和的最小值，若不存在则输出 -1 ，答案对 998244353 取模（ -1 不用）。

数据范围： $2 \leq n \leq 400$ ， $1 \leq m \leq 2n$ ， $1 \leq w \leq 10^{18}$ ， $1 \leq k \leq 10^{64}$ 。多组数据，保证 $\sum n \leq 2 \times 10^5$ 且 $\sum n^3 \leq 6.4 \times 10^7$ 。

定义：设一个环的权值为环上所有边的权值之和除以环包含的边数。设经过点 i 的最优比率环为权值最小的经过 i 的环，若有多个则取任意一个。根据糖水原理，可钦定最优比率环为简单环。设最优比率环的权值为 $\frac{a_i}{b_i}$ ，则 $1 \leq b_i \leq n$ 。若最优比率环不存在，则认为 $b_i = 0$ 。

性质：前提条件为 $k > 2n^2$ 。考虑 1 到 i 的最优路径经过的所有点的集合 S 。设经过 S 中任意一点的最优比率环的权值为 $\frac{A}{B}$ ($1 \leq B \leq n$)。

1 到 i 的最优路径 **可以** 形如：先走不超过 n^2 步，然后在某个最优比率环上走完整的若干圈，直到剩余步数不超过 n^2 ，最后走到 i ，同时满足最优比率环上所有点均属于 S 。

证明：设取到最优比率环对应的点为 $x \in S$ 。任取 x 在路径中的某一次出现，将路径分为前半部分和后半部分。若前半部分的步数超过 n^2 ，根据抽屉原理，可以在前 n 步找到一个简单环。以此类推，可以在前 n^2 步找到 n 个相互独立的简单环。根据抽屉原理，可以选出这 n 个环的非空子集，使得它们包含的边数之和是 B 的倍数。根据 $\frac{A}{B}$ 的最优性（最优比率环不劣于经过路径上任意一点的简单环，故不劣于路径上的任意简单环），将这些环替换为若干圈整的最优比率环，路径权值和不会变大。不断替换直到前半部分的步数不大于 n^2 。同理可证后半部分步数大于 n^2 的情况。

替换过程中可能改变 S ，因为删去简单环时可能从 S 删去点，且最优比率环上所有点并不一定均属于 S 。但是注意到，如果替换后不满足终止条件，那么新的最优比率环权值一定更大：否则最优比率环权值不变，因为 $k > 2n^2$ ，所以调整时至少加入了一个最优比率环，满足终止条件。而最优比率环的权值有限且取值仅有有限种，所以调整总会结束。

解法：若 $k \leq 2n^2$ 则暴力。预处理 $f_{i,j}$ 表示 1 走 i 步到 j 的最小权值，其中 $1 \leq i \leq n^2$ ， $1 \leq j \leq n$ 。可以认为路径在第 $n^2 - n < i \leq n^2$ 步之后进入最优比率环，因此枚举 $n^2 - n < i \leq n^2$ ， $1 \leq j \leq n$ 表示 1 走 i 步进入包含 j 的最优比率环。通过在环上绕圈直到剩余步数不超过 n^2 ，根据 a_i 和 b_i 求出剩余步数 d 以及对应权值，记录在 $g_{d,j}$ 中。最后根据 g 已知的所有信息推回 g_0 求出答案。

$f_i \rightarrow f_{i+1}$ 和 $g_{i+1} \rightarrow g_i$ 的单次转移的复杂度为 $\mathcal{O}(m)$ ，总时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2m)$ 。因为 k 较大，所以需要 $\frac{ak+c}{b}$ 的形式储存答案。

备注：命题人与同校的 ycx，tzc 和 csy 同学讨论了本题的做法，其中前两位是今年集训队选手。

命题思路：命题人在做 “[BJOI2016] 打字机” 一题的过程中，猜测答案在 k 固定且 m 较大时有循环节，与同学探讨并深入分析后得出本题结论。

该结论给出了计算 n 维向量 $\min +$ 或 $\max +$ 乘以 n 维稀疏方阵的高次幂的 $\mathcal{O}(n^2m)$ 算法，其中 m 是方阵非零元素的个数。相较于常用的矩阵快速幂算法，该算法的优势在于以 $\mathcal{O}(\frac{m}{n})$ 的代价去掉了复杂度的 $\log k$ 因子，在 k 较大时表现优秀。需要注意的是，这并不意味着可以在 $\mathcal{O}(n^2m)$ 的时间内计算一个矩阵的 k 次幂，甚至是 $\min +$ 矩乘。

该结论具有一定启发意义：它给出了常见的 $\min +$ 矩阵快速幂做最优化问题的另一种解法（虽然这种题目一般是根据 AC 自动机求出转移矩阵，如 “[CF696D Legen...” 和 “[BJOI2016] 打字机”，所以 $m = \mathcal{O}(n|\Sigma|)$ ，导致该算法没有优势）。“替换为若干最优物品” 的思想可以用于证明 “[THUPC 2023 初赛] 背包” 一题的正确性。类似的思想可用于解决 “[CTSC2011] 幸福路径” 和 “[L&K R-03] 大航海时代”，且由于这两题的路径长度为可以为无穷大，所以性质更强：不在最优比率环上的路径长度为 $\mathcal{O}(n)$ 。关于该结论的深入分析和相关应用，命题人会写在集训队论文中（如果成功进入候选队的话（小声））。

命题人认为本题的结论易理解但不易想到，代码实现不长但具有一定细节，是一道有挑战性的中档题。