

《挑战积和式》解题报告

绍兴市第一中学 翟锦程

1 题目大意

给定一个长度为 n 的自然数序列 a ，选择一个长度为 k ，元素均在 $[1, n]$ 中的序列 b ，使得 $\sum_{i=1}^k a_{b_i} - \prod_{i=1}^k b_i$ 最大。

2 数据范围

对于所有数据： $1 \leq n \leq 10^6, 1 \leq a_i \leq 10^9$ 。

- 子任务 1（4 分） $n, k \leq 15$ 。
- 子任务 2（8 分） $n \leq 100, k \leq 5$ 。
- 子任务 3（6 分） $k = 2$ 。
- 子任务 4（15 分） $n \leq 100, a_i \leq 10^6$ 。
- 子任务 5（8 分） $n \leq 100$ 。
- 子任务 6（7 分） $n \leq 1000, k \leq 10$ 。
- 子任务 7（8 分） $n \leq 1000$ 。
- 子任务 8（9 分） $n \leq 10^5, k \leq 10$ 。
- 子任务 9（11 分） $n \leq 10^5$ 。
- 子任务 10（10 分） $k \leq 10$ 。
- 子任务 11（14 分）无特殊限制。

3 解题过程

3.1 算法一

暴力枚举所有情况，使用隔板法计算可以发现方案数至多只有 $\binom{15+15-1}{15} = 77558760$ 种以及 $\binom{100+5-1}{5} = 91962520$ 种，可以使用搜索等算法通过子任务 1 和 2，期望 $4 + 8 = 12$ 分。

3.2 算法二

当 $k = 2$ 时，题目等价于求 $a_i + a_j - i \times j$ 的最大值。

考虑将 $-i$ 当成斜率 k ， j 当成自变量 x ， a_i 当成纵截距，于是式子变成了 $kx + b + a_j$ ，即一个一次函数。

因此题目转化为给定若干一次函数，求对应 x 坐标的最大值。这是一个经典问题，可以使用凸包和双指针解决。

可以通过子任务 3，时间复杂度 $O(n)$ ，期望 6 分。

3.3 算法三

令 $V = \max_{i=1}^n a_i$ 。

注意到以下性质：

1. 由于每选一个数，答案的增长量至多只有 V ，因此乘积的增长量亦不会超过此数。
2. 由于推论 1，总乘积不会超过 $2V$ ，因此至多选择 $O(\log V)$ 个非 1 数。

当 $a_i \leq 10^6$ 时，最多选择 20 个非 1 数，因此我们可以将 k 对 20 取 $\min$ 。

设计一个 DP 状态 $f_{i,j}$ 表示已经选择了 i 个数，乘积为 j 时 $\sum a_i$ 最大是多少。

转移数很少，对于一个 i ，只有 $\sum_{j=1}^{2V} \min(n, \lfloor \frac{V}{j} \rfloor + 1)$ 个转移。

因此直接做 k 次即可，可以通过子任务 4，期望 15 分。

3.4 算法四

有以下引理：

- 若一个可重集合 S ，满足 $\forall x \in S, 0 \leq x < \frac{2}{3}$ ，且 $\sum_{x \in S} x = 1$ ，则一定存在一个可重子集 $T \subset S$ 满足 $\frac{1}{2} \leq \sum_{x \in T} x \leq \frac{2}{3}$ 。

证明：

重复以下过程：

1. 若当前存在 $x \in S, \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ ，则直接结束。
2. 否则将当前 S 内最小的两个元素 $x, y (x \leq y)$ 取出，将 $x + y$ 加入 S 。

当元素只有两个时，较大的那个元素满足条件。

当元素数量至少为 3 时，选择的两个数 $x \leq y \leq \frac{1}{3}$ ，否则剩下的数之和不超过 $\frac{1}{3}$ ，与 x, y 是最小的两个元素矛盾。

因此我们可以将选择的数分成两半，再用 $k = 2$ 的做法合并。

将一个选 a 个的序列和一个选 b 个的序列做类似狄利克雷卷积的东西后，可以得到一个选 $a + b$ 个的序列。由于有引理，这里我们只需要做到 $V^{\frac{2}{3}}$ 。

最后对每个可能的 $a + b = k$ ，做一遍 $k = 2$ 的情况即可。

这样即可做到 $O(V^{\frac{2}{3}} \log V^{\frac{2}{3}} \min(k, \log V))$ ，期望 59 ~ 86 分。

3.5 算法五

这样依然无法通过此题，我们需要继续发掘性质。

考虑另一个引理：

- 若一个可重集合 S ，满足 $\forall x \in S, 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ ，且 $\sum_{x \in S} x = 1$ ，则一定存在一个可重子集 $T \subset S$ 满足 $\lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor \leq |T| \leq \lceil \frac{|S|}{2} \rceil, \frac{1}{2} \leq \sum_{x \in T} x \leq \frac{2}{3}$ 。

证明：

首先当元素个数为奇数时，我们可以向集合内加入一个 0，这样就转化为了偶数的情况。因此下面我们只讨论偶数的情况。

将元素升序排列，然后选择所有排名为偶数的数，此时的子集即满足条件。

考虑证明这个子集 T 满足条件，首先元素个数显然为 $\frac{|S|}{2}$ 。

这个子集里的每个元素均存在一个集合外的元素不大于它，因此它不会小于总和的一半，即：

$$\sum_{x \in T} x \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in S} x \right) = \frac{1}{2}$$

将最大元素删除后，这个子集里的每个元素均存在一个集合外的元素不小于它，因此它不会大于总和的一半，即：

$$\sum_{x \in T} x - \max_{x \in S} x + \max_{x \in S} x \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in S} x - \max_{x \in S} x \right) + \max_{x \in S} x \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

这样我们就只需要计算 $a = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, b = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ 的情况和 $a = 1, b = k - 1$ 的情况了。

使用快速幂求出它们即可，时间复杂度优化到 $O(n \log V \log \min(k, \log V))$ 。