

这不是一道数据结构题 解题报告

安徽师范大学附属中学 马未然

Oct 2023

1 题目大意

给定一张简单连通无向图，给点重标号，使得任意两条边代表的区间无交或相互包含。一条边代表的区间是 (a, b) ，其中 a 是其标号较小的端点， b 是其标号较大的端点。计数合法的重标号个数，答案对 $10^9 + 7$ 取模。

对于一部分数据，给定的是一棵树。

对于一部分数据，给定的是一棵基环树。

对于一部分数据，存在至少一种合法的重标号方案。

对于全部数据，有 $n, m \leq 2 \times 10^5$ 。

2 一些转换

考虑一组重标号方案合法的充分必要条件：将节点按标号顺序顺时针放到圆上，每条边作为连接圆上两点的弦，则任意两条弦只会在端点处相交。

那么我们可以直接考虑将点按某个顺序放到圆上的合法方案数。在这个问题中，我们可以钦定任意节点作为圆上的第一个节点，最后再将答案乘以 n 。

3 对于树的做法

我们任意钦定一个节点作为树的根，并放到圆上的第一个节点。

观察可以发现，对于根节点的任意两个子节点对应的子树，它们中的节点一定是占据了圆上的一段连续的位置，而不会相交。

当一个节点 i 作为根时，我们可以给它的子节点安排一个顺序，这里一共有 $d_i!$ 种方案。其中 d_i 是这个节点的度数。

我们猜测，可以给每个节点的所有相邻节点安排一个相对顺序。观察发现，在钦定一个点作为圆上第一个节点后，对于安排相邻节点相对顺序的方案，可以和合法的重排方案构成一一对应。那么两者数量相等。

所以树的答案就是 $n \prod_{i=1}^n d_i!$ 。

4 对于基环树的做法

发现对于一个环，它其中任意两个相邻的节点，在圆上也一定相邻。那么将这个环放到圆上，也只有顺时针和逆时针两种方案。

考虑建出基环树的圆方树。对于每个节点，它可以给其所在的所有点双连通分量安排上一个相对顺序，且这种安排在环放置好之后也是与合法重排方案一一对应的。

特别地，对于刚才树的情况，也可以将一条边视作一个点双连通分量，不难发现两者的本质是相同的。

建出圆方树后，记第 i 个圆点（原图中的节点）的度数为 d_i ，则答案为 $2n \prod_{i=1}^n d_i!$ 。

其中 2 的含义是放置环的两种顺序。

5 对于存在至少一种合法的重标号方案的做法

先假设原图是一个点双连通分量，观察其形态。

我们找到原图中的任意一个极大环。因为图点双连通且环是极大的，所以对于任何一个不在环上的点，它都连接了两个环上不相邻的节点。如果存在这样的点，就一定没有合法方案，与给定的性质矛盾了。

所以可以推导出，原图存在哈密顿回路，也即原图是一个由连接所有节点的环和连接环上非相邻节点的一些弦构成的。

发现环还是只有两种放置顺序，而且在保证合法的情况下非相邻节点间的边对答案没有影响，可以忽略。

现在考虑一张无向图的每个点双。除去只有两个节点的点双，每个点双都可以视作一个环，那么原图就可以视作一个仙人掌。

发现贡献的计算和基环树是几乎一样的，只是可能有多个环所以 2 的次数不一定是 1。

我们令 c 表示有超过两个节点的点双的个数，则答案为 $2^c n \prod_{i=1}^n d_i!$ 。

6 对于全部数据的做法

现在我们已经知道了当存在合法方案时的答案，那么我们就只要判断是否有合法方案。

存在合法方案的充要条件是对于每个有超过两个节点的点双，它都是由一个大环和若干环上不相交的弦构成的。

对于每个点双分开考虑，假设一个点双合法，那么我们一定能通过不断缩度数为 2 的节点（将其删去，并连接它的两个相邻节点）使得其最后只剩下两个节点。

然而这个限制是不充分的，因为它并不能保证每个节点都在环上。

我们进一步考虑，发现在对于合法点双缩二度点的过程中，是可以轻易得到环上的所有边的。既然这样，我们直接尝试得到环上的所有边，然后判断这些边能否构成一个大环。

将两个条件结合起来，就是合法的充要条件了。

在缩二度点的过程中，需要哈希表来维护两点之间是否有边，来做到线性。统计答案的过程只需要圆方树，也是线性。

所以时间复杂度为 $O(m)$ 。

如果不使用哈希表，而用一些 $\log$ 数据结构维护，则时间复杂度为 $O(m \log n)$ 。

两者均可轻松通过。

7 参考资料与致谢

圆方树 - OI Wiki: <https://oi-wiki.org/graph/block-forest/>

感谢集训队员李铭乐洋同学在验题过程中提供的较原做法更优秀的现做法。

感谢集训队员冯政玮同学的验题。