

不动棋命题报告

李静榕

2023 年 11 月 19 日

目录	I
----	---

目录

1 题目大意	1
2 数据范围	2
3 解题过程	3

1 题目大意

有一棵树，一个初始包含所有树点的点集进行 $n-2$ 次删除，要求出每次删除后点集中最近的两点距离和这样的点对数量。强制在线。

2 数据范围

对于不强制在线部分，有 $n \leq 100$ ， $n \leq 1000$ 和 $n \leq 2 \times 10^5$ 的部分分。

对于强制在线部分，有树形态为链的部分分。

3 解题过程

首先考虑非强制在线部分。容易将操作过程翻转变为添加棋子，这一问题可以通过点分树简单维护：点分树时维护距离一个点分中心的最远点和次远点。对于统计点对数量，也可以在得出最短距离之后通过点分树求出。这个算法的复杂度是 $O(n \log n)$ 。

对于 $n \leq 2 \times 10^5$ 的做法：

对于强制在线部分，可以注意到在答案为 ans 时，点集大小不超过 $\frac{2(n-1)}{ans}$ 。在删点过程中答案单调不减，在每次答案发生变化时重新添加当前点集里的所有点，这么做操作次数是 $O(n \ln n)$ 的。当点对数量清零时答案会发生变化，维护点对数量同样使用点分树维护。总复杂度 $O(n \ln n \log n)$ 。

对于点集大小的证明，考虑对于每个点集中的点在树上画出半径为 $\frac{ans}{2}$ 的圆，那么所有的圆都不会有任意两个不同的圆交的面积不为 0。将树上的一条边扩展成两条，那么一个点所在的圆会包含至少 ans 条边，边总共有 $2(n-1)$ 条，所以点集大小不会超过 $\frac{2(n-1)}{ans}$ 。

对于 $n \leq 5 \times 10^5$ 的做法：

考虑对于点分治的每个分治中心维护出经过它的最短路径和这个长度的路径的个数，然后在一个桶上统一计算答案。考虑直接求出距离分治中心第一近和第二近的点形成路径，并统计路径条数。如果两个点来自同一棵子树，全局的答案一定会比这个长度小，所以不合法的路径不会影响答案。对于每一个分治中心开一个大小为连通块内最大深度的桶并维护两个指针即可统计答案。总复杂度 $O(n \log n)$ 。

参考文献

- [1] CF1790F (<http://codeforces.com/problemset/problem/1790/F>)
- [2] CF324E (<https://codeforces.com/problemset/problem/342/E>)