

天空度假山庄 解题报告

题目大意

有一个 n 个点的完全图，需要构造一条从 1 号点开始经过 $(n-1)k$ 条边的路径，使得每 k 步走到的点互不相同且不为起点，每条边只被经过至多一次。

数据范围

$$nk \leq 10^6, n \geq \max(30, 2k + 15), k \geq 1$$

解题过程

subtask1 : $k \leq 2$

$k = 1$ 是平凡的，只需要把 $2 \rightarrow n$ 挨个走一遍即可。

$k = 2$ 有很多种简单的构造方式，这里提供其中一种：

$$3, 2, 4, 3, 5, 4, \dots, (x+1), x, \dots, n, n-1, 1, n$$

subtask2 : $n \geq 4k^2 + 229$

n 是一个 $O(k^2)$ 级别的数，一共有 $O(k^4)$ 条边，而所需构造路径长度为 $O(k^3)$ ，因此限制相当宽松。

可以采用每次随机走边，并保证每 k 步的终点不同的方式去构造。诸如此类随机化算法很多，应该都能通过。

subtask3 : $n \geq 5k + 15$

n 是 $O(k)$ 级别时，随机化已经不再拥有高正确率，考虑进行归纳。

假设现在构造出了一个 $n_0 \geq 2k + 1$ 的解，如何往其中再加一个点。

设 n_0 解的路径终点为 x ，那么 $x \rightarrow a \rightarrow n_0 + 1 \rightarrow b \rightarrow x$ 这样一个长为 4 的环可以减小接下来还剩下的步数，其中 a, b 是任意两个不为 x 且 $\leq n_0$ 的点。

我们只需要不断选取不同的 a, b ，就可以让 $k \leq 4$ 。

所需 a, b 的数量一共是 $2 \times \frac{k}{4} = \frac{k}{2}$ 左右，在 $n_0 + 1$ 拓展到 $n_0 + 2$ 时又需要额外 $\frac{k}{2}$ 个点，后续又可以重复使用 n_0 拓展到 $n_0 + 1$ 的这些 a, b 。

因此一共只需要 k 个点作为反复利用的 a, b ，而 $n_0 \geq 2k + 1$ ，所以是够用的。

对于 $k \leq 4$ 之后，分成四种情况讨论：

- $k = 1 : x \rightarrow n_0 + 1$
- $k = 2 : x \rightarrow a \rightarrow n_0 + 1$
- $k = 3 : x \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow n_0 + 1$
- $k = 4 : x \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow x \rightarrow n_0 + 1$

其中 a, b 仍然是 $\leq n_0$ 的两个可行点。注意到这样构造 $a \rightarrow b$ 这条边会被占用，不能重复利用。

但是当 $n_0 + 1$ 加入后，又会向先前的点连边，新产生 $O(k)$ 条边，所以是可行的。

最后的问题是如何找到 $n = n_0$ 这样的初始解。注意到其实只需要 n_0 中的点皆被作为过一次终点，而不需要剩余点未被经过。

因此直接初始随便走 $(n_0 - 1)k$ 步，再将剩下的点按度数从小到大排序处理即可。实现细节略复杂。

subtask4 : k 为一些给定值

这一档分是给一些对 k 固定可行的做法：

比如调整法，即在随机化的基础上进行随机调整得到解的做法。

这些给定的 k 还有性质： $k \equiv 1 \mid k \equiv 2 \pmod{4}$

这样并不需要考虑 *subtask3* 做法中 $a \rightarrow b$ 这样的边，可以减少实现细节，以及更多可能的做法。

subtask5 : 无特殊限制

观察一下 *subtask3* 做法的局限性：找到初始解需要 n 比较宽松。

我们考虑摒弃找初始解这样的过程而是直接做。

仍然假设目前路径终点为 x ，考虑如何扩展到 $x + 1$ 。

把 $1 \rightarrow n$ 看做一个环，即接下来写的每一个数 x 其实是 $(x - 1) \bmod n + 1$ 。

我们每次让 a, b 为从 $x + q$ 往后的数， q 是一个较小的常数。

直接这样还是会有重复。因为 $x + 1 \rightarrow x + 2$ 时会再次使用 $x + q + 1$ 往后的这些数，导致边的重复。

因此我们不妨规定：从 $x + q$ 开始隔一个数用一个，即 $x + q + 2, x + q + 4 \dots$ ，这样就能把奇偶错开。

经过上面的分析，每次扩展使用的数最多为 $\frac{k}{2} + 1$ 个，这样错开后使用的长度为 $k + 2$ ，那么 $x + k + q + 2$ 在扩展时会用到 $x + 2k + 2q + 4$ ，为了保证不重复，需要保证 $2k + 2q + 4 \leq n$ ，注意到 $n \geq 2k + 15$ ，因此 $3 \leq q \leq 5$ 即可，标程的 q 取了 4。

总结一下，构造就是 x 初始为 1，从 x 到 $x + 1$ 时：

$x \rightarrow x + q \rightarrow x + 1 \rightarrow x + q + 2 \rightarrow x \rightarrow x + q + 4 \rightarrow x + 1 \rightarrow x \rightarrow x + q + 6 \dots$ ，然后再迭代。

每步迭代先让 $k \leq 4$ ，再根据 k 模 4 的情况进行讨论剩下几步的走法。这样就解决了这个问题，时间复杂度为 $O(nk)$ 。

参考资料

与李劲逸同学的讨论