

崩坏天际线 解题报告

1 题目内容

1.1 题目描述

有 Q 个事件依次发生。事件分为两种：

- 1 $l\ r$, 出现一个新的区间 $[l, r]$ 。
- 2 x , 所有满足 $l < x$ 且 $x < r$ 的区间 $[l, r]$ 都会以 $\frac{1}{2}$ 的概率变成 $[l, x]$, 另 $\frac{1}{2}$ 的概率变成 $[x, r]$ 。

请求出最后所有区间的期望长度之和, 对998244353取模。(区间 $[l, r]$ 的长度为 $r - l$)

1.2 数据范围

对于所有数据: $1 \leq n, Q \leq 50000, 1 \leq l < r \leq n, 1 \leq x \leq n$ 。

Subtask 1 (10 pts) : $1 \leq n, Q \leq 500$ 。

Subtask 2 (20 pts) : $1 \leq n, Q \leq 5000$, 依赖*Subtask 1*。

Subtask 3 (40 pts) : 保证所有事件1在所有事件2之前。

Subtask 4 (30 pts) : 无特殊限制, 依赖*Subtask 1, 2, 3*。

1.3 题目来源

本题是一道原创题。

2 解题过程

本题复杂度分析时默认 n, Q 同阶。

2.1 算法 1：

直接按照题意模拟，维护当前所有可能出现的区间和它们的出现概率。操作1插入一个概率为1的区间 $[l, r]$ ，操作2枚举当前所有区间，如果 $l < x$ 且 $x < r$ 则分裂，否则不变。一个区间最多被分裂为 $O(n)$ 个区间，所以每一时刻的区间数量是 $O(n^2)$ 级别，总共 $O(n)$ 次操作，总复杂度 $O(n^3)$ ，可以通过子任务1。

2.2 算法 2：

一个区间 $[l, r]$ 最后被分裂成的区间由在它之后出现的所有在 $[l + 1, r - 1]$ 的分裂操作决定，而每个区间的出现概率由每个分裂操作的第一次出现时间决定。若 $[l, r]$ 分裂成了 $[x, y]$ ，则在 $[l + 1, x]$ 的所有分裂一定是留下了右边的， $[y, r - 1]$ 的所有分裂一定是留下了左边的。而有效的分裂一定是没有在它之前出现且在它和 $[x, y]$ 之间的分裂。也就是说， $[l + 1, x]$ 的有效分裂是从 x 开始往左时间的前缀最小位置， $[y, r - 1]$ 的有效分裂是从 y 开始往右时间的前缀最小位置。这些位置可以通过单调栈求出。最后的出现概率就是 $\frac{1}{2}$ 有效分裂个数。这样就可以离线所有操作，从后往前计算，操作2更新该分裂的第一次出现时间，操作1单调栈计算每个区间的出现概率，复杂度 $O(n)$ ，总共 $O(n)$ 次操作，所以总复杂度 $O(n^2)$ ，可以通过子任务1, 2。

2.3 算法 3：

对于子任务3，存在特殊性质保证所有操作1在所有操作2之前。这个性质保证了每个区间往后的分裂操作以及它们的第一次出现时间是相同的。也就是说，不会在某个时刻存在一个区间包含一个已经出现的分裂操作。那么任一时刻的所有区间只有以下几种可能性：未被分裂过（没有任何分裂操作在区间中），是某个分裂位置往前或者往后的一段（不会延伸到下一个分裂位置），当前相邻两个分裂位置组成的区间。那么直接按照顺序考虑每个分裂操作，同时维护所有区间的形态。首先求出每个区间的第一次分裂时刻，这个可以用线段树区间求 $\min$ 算出。此时区间将以各 $\frac{1}{2}$ 的概率挂在该分裂位置的左边和右边。然后考虑新增了一个分裂位置 X ，它左边和右边的分裂位置是 L 和 R 。对于所有区间 $[L, R]$ ，它们将会分裂成 $[L, X]$ 和 $[X, R]$ 。对于 L 的右边，右端点 $> X$ 的区间将会分裂成两半，一半就是 $[L, X]$ ，另一半右端点不变，但是需要挂在 X 上且概率乘上 $\frac{1}{2}$ 。右端点 $\leq X$ 不受影响。对于 R 的左边也是同理，最后还需要将以 X 为第一次分裂操作的区间插入到 X 的左和右。这整个过程都可以用动态开点线段树来维护，线段树上记录乘法 tag 和当前区间的总概率和 sum ，分裂区间就是线段树分裂，用线段树上的 sum 乘上区间长度就能算出答案。总时间复杂度 $O(n \log n)$ ，空间复杂度 $O(n \log n)$ ，可以通过子任务3，结合算法2可以通过子任务1, 2, 3。

2.4 算法 4：

尝试延续算法3中的方法，考虑直接对操作序列分块，设分成了 B 块，每一次对于块内的插入的区间求出最后的期望长度之和。块内的分裂操作可以暴力进行，把每个区间分成 $O(\frac{n}{B})$ 个新区间，对于这个块往后的所有分裂操作就满足了算法3需要的特殊性质，把分裂出的区间套用算法3处理即可，而块内的暴力操作可以套用算法2中的方法。分析一下复杂度，块内的暴力操作复杂度 $O(\frac{n}{B} * \frac{n}{B} * B) = O(\frac{n^2}{B})$ ，总共分裂出了 $O(\frac{n^2}{B^2})$ 个新区间，它们插入线段树的复杂度是 $O(\frac{n^2}{B^2} * \log n * B) = O(\frac{n^2}{B} \log n)$ ，每个分裂操作线段树分裂的复杂度是 $O(n * \log n * B) = O(n B \log n)$ ，总复杂度是 $O(\frac{n^2}{B} \log n + n B \log n)$ ，当 B 取 $\sqrt{n}$ 时最优，为 $O(n \sqrt{n} \log n)$ ，可以通过所有子任务。也存在在子任务3使用笛卡尔树维护区间出现概率，树上 lca 查询答案的方法，带上序列分块总复杂度可以做到 $O(n \sqrt{n \log n})$ 或 $O(n \sqrt{n})$ ，皆可通过本题。

3 参考资料

无。