

THUPC2024 初赛 A

排序大师

ltst & He_Ren

THU, IIIS

2023/12/17

Idea comes from: 抄的论文



，但核仁给了一个比较自然的做法。

题意

- 用最少的“段交换”操作将长度为 n 的排列排序。
- “段交换”操作为以下操作：将排列分成五段，其中第二段和第四段不能为空、其他段可以为空，交换第二段和第四段再拼回去。
- $n \leq 2000$ 。

解法

- 需要最小化交换次数，意味着我们同时需要上界和下界的分析。
- 下界分析的常用办法是图模型，最常见的是 $p_i \rightarrow i$ 的模型。但对于这个操作来说它不适用，因为一次交换会导致图上很多的边产生改变。

解法

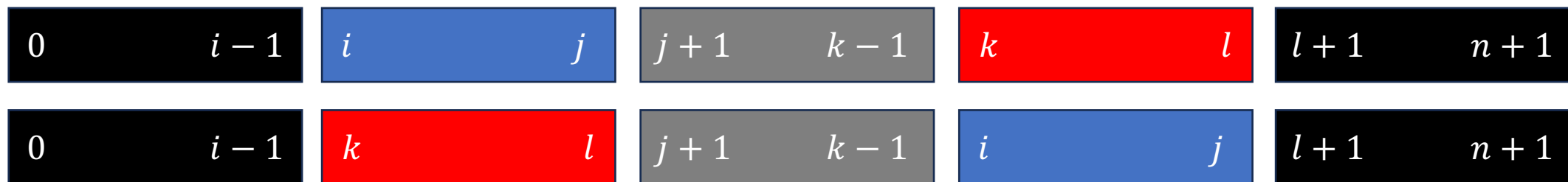
- 需要最小化交换次数，意味着我们同时需要上界和下界的分析。
- 下界分析的常用办法是图模型，最常见的是 $p_i \rightarrow i$ 的模型。但对于这个操作来说它不适用，因为一次交换会导致图上很多的边产生改变。
- 这提示我们需要考虑这样的图模型：在这个模型下，一次段交换操作只会改变其中常数条边。
- 再注意到，一次交换中形如 $p_i \rightarrow p_{i+1}$ 的边只会改变最多四条，符合我们的要求，但这个模型并不能直接用于下界分析，因为目标状态是一条特殊的链，不能用环数分析。

解法

- 我们做一些简单的调整：在排列最前面加入一个 0、最后加入一个 $n + 1$ ，然后加入 $p_i + 1 \rightarrow p_{i+1}$ 的边。此时终态是一个 $n + 1$ 个自环构成的图，符合“单次操作改变边数少”，同时环数相关的下界分析可以利用了。
- 此时我们来考虑一次操作究竟会干什么。

解法

- 不妨假设第三段非空，此时交换前后的状况如下：



- 最初的四条边

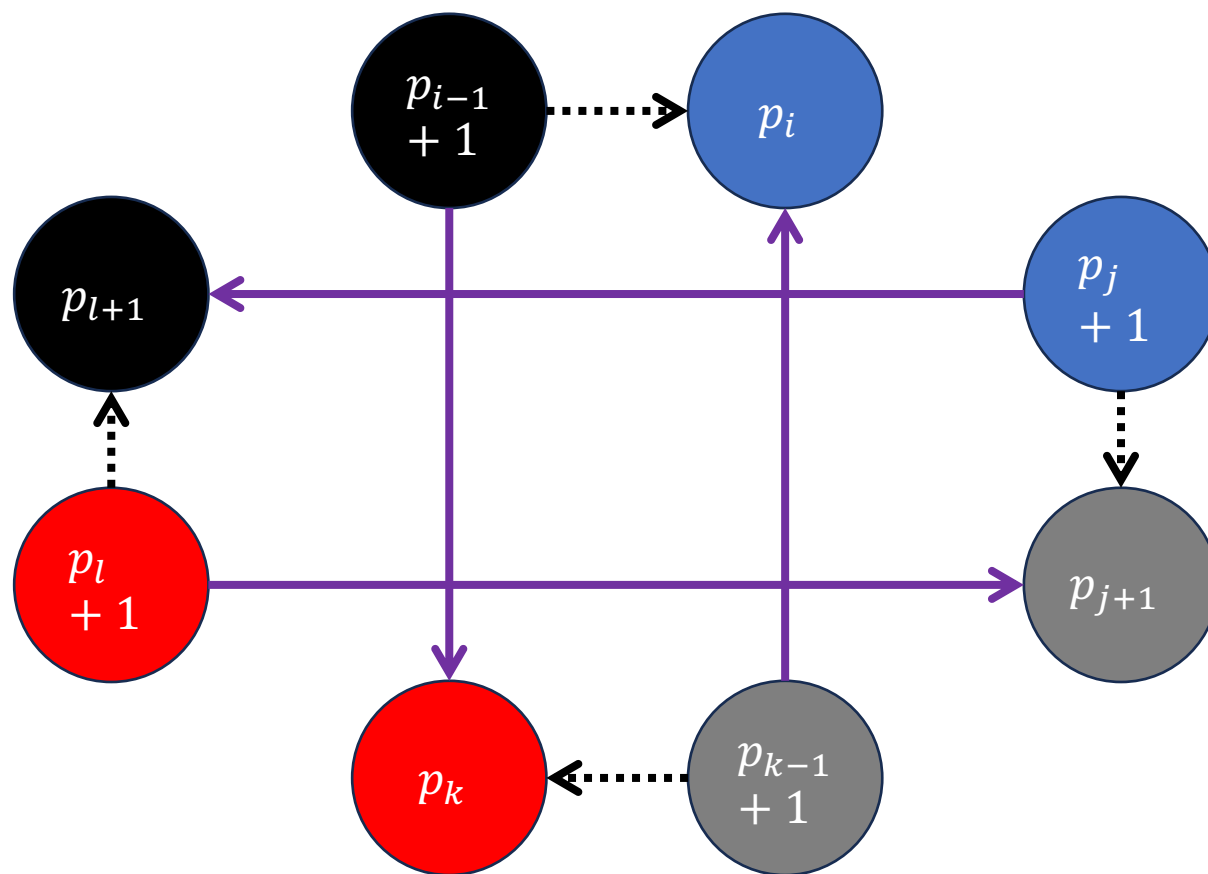
$$p_{i-1} + 1 \rightarrow p_i, p_j + 1 \rightarrow p_{j+1}, p_{k-1} + 1 \rightarrow p_k, p_l + 1 \rightarrow p_{l+1}$$

被改为

$$p_{i-1} + 1 \rightarrow p_k, p_l + 1 \rightarrow p_{j+1}, p_{k-1} + 1 \rightarrow p_i, p_j + 1 \rightarrow p_{l+1} \circ$$

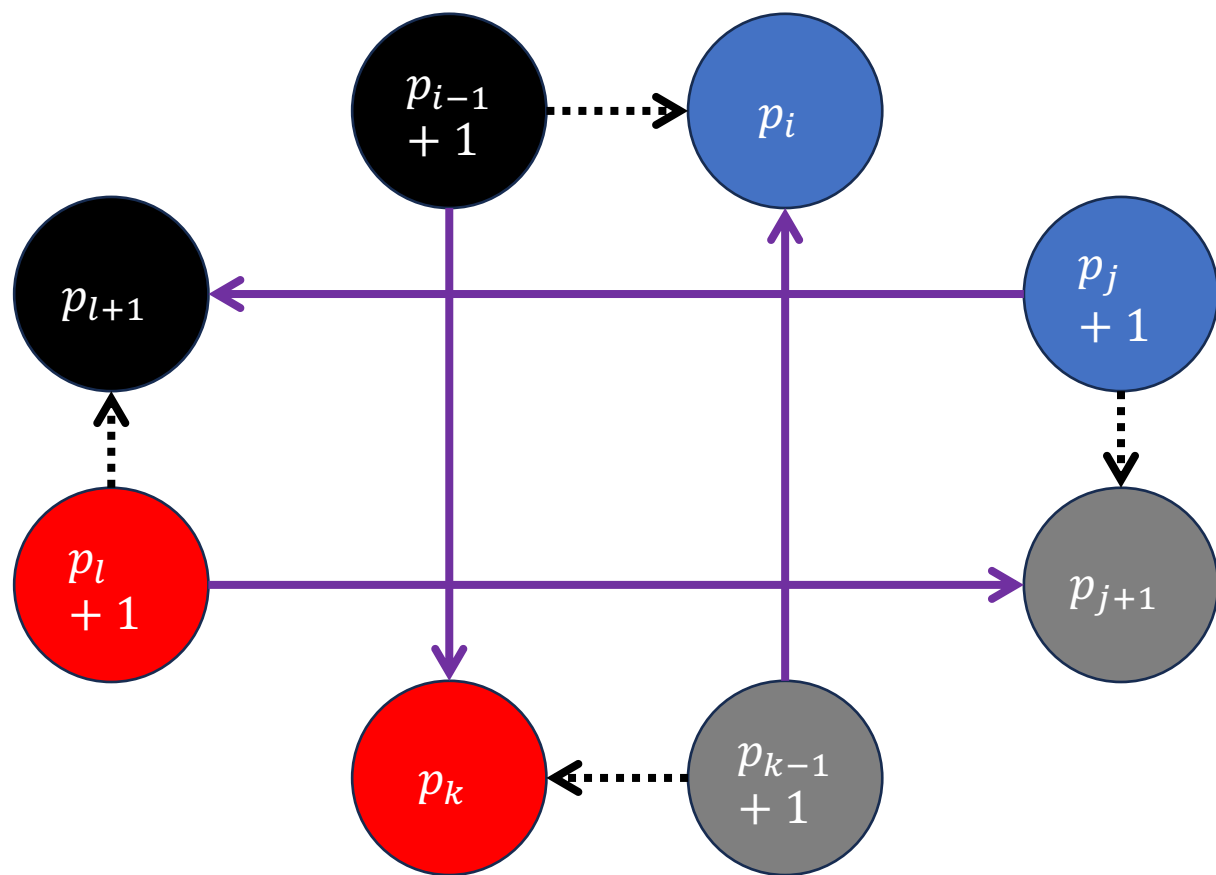
- 看起来还是画图比较直观（

解法



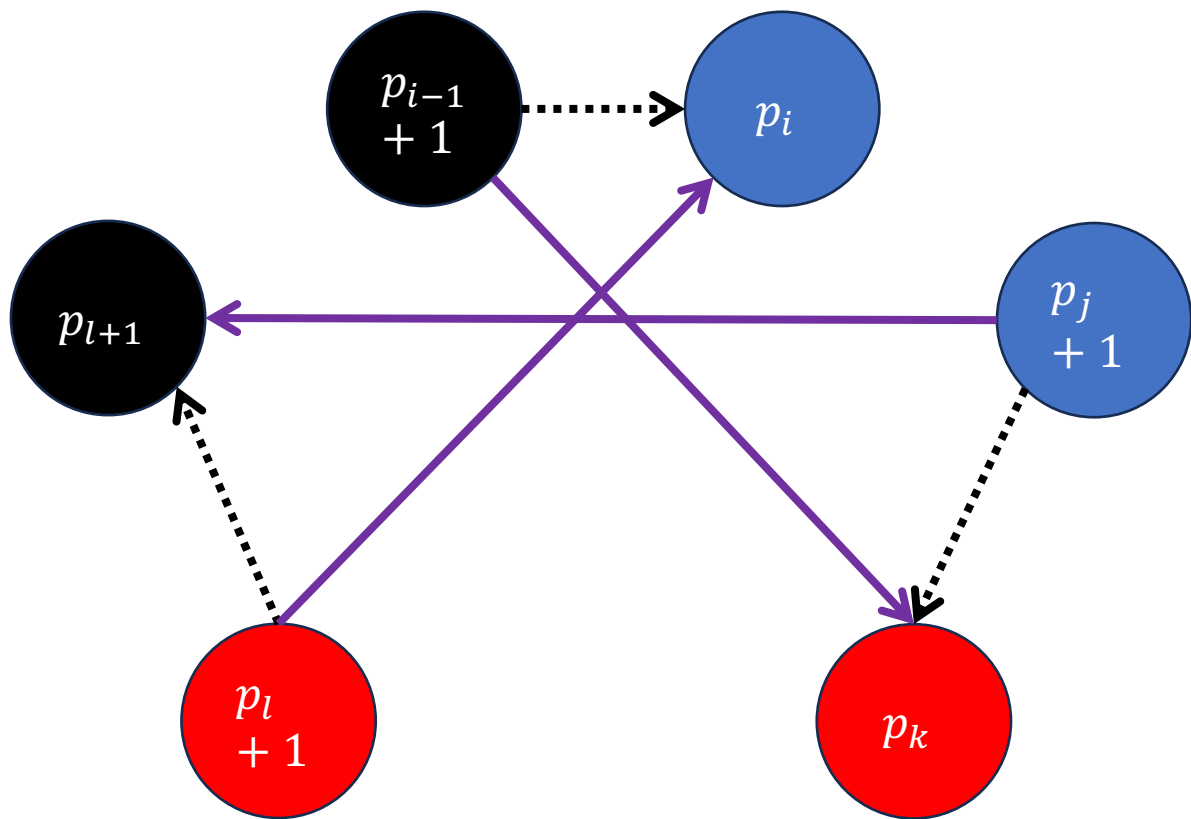
0	$i-1$	i	j	$j+1$	$k-1$	k	l	$l+1$	$n+1$
0	$i-1$	k	l	$j+1$	$k-1$	i	j	$l+1$	$n+1$

解法



- 这个修改操作相当于做以下操作两次：选两条边交换它们的出点。这个操作会恰好将环数改变 1（读者自证不难），因此一次操作最多将环数减少 2，且不会改变环数的奇偶性。

解法



- 对于第三段为空 ($j + 1 = k$) 的情况, 可以认为是先交换了 $p_{i-1} + 1$ 和 $p_j + 1$ 的出边, 再交换 $p_j + 1$ 和 $p_l + 1$ 的出边, 所以环数也最多改变不超过 2, 且不改变环数奇偶性。

解法

- 因此我们只要能找到一种操作方案每次将环数增加 2 就行了。
- 考虑如下构造：
 - 选择一个最小的 x 满足 x 前面有比 x 大的元素；
 - 再选择 x 前面最大的元素 y 。
 - 此时 $(x - 1)$ 一定在 y 前面（否则与 x 的最小性矛盾），且 $(y + 1)$ 一定在 x 后面（否则与 y 的最大性矛盾）。
 - 因此用一次操作将 $x - 1, \dots, y, \dots, x, \dots, y + 1$ 变为 $x - 1, x, \dots, y, y + 1$ 。

解法

- 在 $x - 1, \dots, y, \dots, x, \dots, y + 1$ 中被修改的四（或三）条边为与 x 相邻的两条边和与 $y + 1$ 相邻的两条边，所以这四（或三）条边一定在一个或两个环里；
- 而修改过后，出现了额外的两个自环（ $x - 1, x$ 以及 $y, y + 1$ ）。因为环数奇偶不会改变，因此环数一定加 2。
- ~~• 当然也有一些其他的构造可能满足以上条件。所以这题正确的做法是，猜一堆结论，写个 gen 拍一拍，拍过了就交。~~