

括号

题意

给出一个长度为 $2n$ 的括号序列 s ，修改第 i 个括号有代价 a_i ， q 次修改 a_i 并询问将 s 修改为合法括号串的最小代价和，修改是永久的，询问相互独立。

$n \leq 10^5$, $q \leq 5 \times 10^5$, $0 \leq a_i \leq 10^9$ 。

- subtask 1(15pts): $n, q \leq 100$
- subtask 2(10pts): $n, q \leq 1000$, s 在所有括号串中随机生成
- subtask 3(10pts): $n, q \leq 1000$
- subtask 4(5pts): $a_i = x = 1$
- subtask 5(25pts): $q \leq 10^5$
- subtask 6(35pts): 无特殊限制

做法 1

记 $f_{i,j}$ 括号匹配到 i ，有 j 个左括号没匹配，转移考虑当前是左括号还是右括号即可，复杂度 $O(qn^2)$ 。

做法 2

有一个结论， n 个随机 ± 1 变量的前缀和最大值的期望是 $O(\sqrt{n})$ 的。可以猜想在 s 随机的情况下只要把做法 1 中的第二维开到 $O(\sqrt{n})$ 就行了，复杂度 $O(qn\sqrt{n})$ 。

做法 3

考虑 $a_i = 1$ 。我们只要求出一组答案。考虑将左括号看做 $+1$ ，右括号看做 -1 ，求出前缀和 pre 。

不难通过各种方法发现答案只和 pre_n 以及 $\min pre_i$ 有关，大概就是 $\frac{pre_n}{2} - \min pre_i$ 。证明我们放在后边的部分。

做法 4

考察前缀最小值位置 p 。

显然前缀最小值的点在经过修改后 $pre_p \geq 0$ ，也就是说如果只考虑 $\leq p$ 位置的修改，会将 $> p$ 的所有 pre 都弄成 ≥ 0 。

这说明我们不可能在 p 右边将一个右括号修改为左括号，否则必然可以和另一个修改相抵消。因此，最优解一定是 $[1, p]$ 只将右括号变为左括号、 $[p+1, n]$ 只将左括号变成右括号，使得两边都合法。

把折线分成两部分分别满足，这可以用一个简单的贪心解决，以 $[1, p]$ 中为例，每次前缀和 < 0 就将所有右括号中 a_i 最小的变为左括号，可以用大根堆维护。

事实上，这样将 $\lceil -pre_p/2 \rceil$ 个右括号改为左括号、 $\lceil (pre_n - pre_p)/2 \rceil$ 个左括号改为右括号，两段折线恰好能在 p 处拼上！

这样就能做到 $O(nq \log n)$ 。

做法 5

剩下的部分就是省选 D1T3 链的情况，我们称上一个做法中取出 top 的位置为关键位置，那么 a_i 到 $\geq i$ 的任一个关键位置，每个关键位置匹配一个 a_i 。

考虑快速维护这个贪心，由于有修改，将询问离线，用线段树分治转化为只加的问题。

这个时候如果直接维护每个点选了哪个十分困难，但选的顺序不重要，因而我们可以维护选了那些 a_i 和还剩下的空关键位置，新插入一个数有以下两种情况：

- $\geq i$ 还有空关键位置， a_i 直接占据最近的。
- $\geq i$ 没有空关键位置， a_i 最多替换当前解中的一个值。

对于第二种情况，考虑贪心的过程，显然除了已经选上的数以外不用考虑，考虑所有 $< i$ 的关键点，如果大根堆空了，那么在这个位置之前的数都已经固定，找到这样最大的位置 p 。

显然所有 $j > p$ 的选了的 a_j 都会直接和间接与 a_i 比较，踢掉一个最大值。

上述找 p 、找最大的 a_j 都可以用线段树维护，套上线段树分治复杂度 $O((n + q) \log q \log n)$ ，空间 $O(n)$ 。

做法 6

事实上我们并不需要线段树分治，可以类似加入的过程做到删除一个元素。

删除 a_i 时找到 $> i$ 的第一个大根堆为空的位置，那么这个位置之前最小的没有被选的元素必然在此时和 a_i 比较，故而选其中 a 最小的即可，加入 a_i 和做法 5 相同。

上述所有过程都可以用线段树优化，复杂度 $O((n + q) \log n)$ ，获得 100 分。

参考资料

2023 联合省选 D1T3 人员调度做法

注：这个题曾经放到联测，做过的集训队成员包括陈昕阳，参与讨论的集训队成员包括谢梓涵