

《最后的晚餐》解题报告

崔隽章

1 题目描述

1.1 简要题意

对于由正整数构成的可重集合 A , 将其所有元素按照任意顺序排列得到序列 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 并通过 $\{a_n\}$ 构造长为 $n + 1$ 的序列 $b_0, b_1, \dots, b_n$ 满足 $b_i = \left\lfloor \frac{\sum_{j=1}^i a_j}{10} \right\rfloor$ 。

记 $f(A) = \max_{\{a_n\}=A} |\{b_n\}|$, 其中对可重集合 S 定义 $|S|$ 表示 S 中不同的数的个数。即将 A 重排为 $\{a_n\}$, 求 $\{b_n\}$ 中不同数的个数的最大值。

给定可重集合 A , 对其所有本质不同的子集 B 求 $f(B)$ 之和对 998244353 取模后的值。

此处两个可重集本质不同当且仅当存在一种元素, 其在两个集合中出现次数不同。

1.2 数据范围

本题评测开启子任务捆绑。

子任务编号	$n \leq$	特殊性质	子任务分数
1	20	无	4
2	40	无	12
3	2000	$a_i \leq 11$	16
4	2000	$a_i \neq 1$	12
5	100	无	12
6	300	无	8
7	600	无	12
8	2000	无	24

对于所有测试数据保证, $1 \leq n \leq 2000, 1 \leq a_i \leq 12$ 。

2 解题思路

2.1 $n \leq 40$

对问题进行搜索，对所有 $f(B)$ 进行记忆化，时间复杂度 $\tilde{O}(3^{n/3})$ 。
根据不同实现可以获得 4 ~ 16 分。

2.2 $a_i \leq 11$

为表述方便，记 $c_1, \dots, c_{12}$ 为 A 中 $1, \dots, 12$ 分别的出现次数。

记 $F(c) = f(A) - 1$ ，考虑如何求 $F(c)$ 。

将问题看作最大化前缀和进位次数，易得 $S := \lfloor \frac{\sum a_i}{10} \rfloor$ 是答案的上界。

我们期望 $1 \cdots S$ 中作为前缀和除以 10 下取整被取到的数的个数尽量多，则我们希望避免出现前缀和的十位的增量 > 1 的情况，即避免在前缀和的个位数为 9 时将 11 作为 a 中的下一个数。

不妨考虑这样一个逐位确定 a 的贪心策略 π ：

- 若前缀和个位不为 9，且 11 尚未用完，将 11 作为 a 的下一个数。
- 否则，任选一个不是 11 的数作为 a 的下一个数。若仅剩 11，则结束过程。

若过程结束后 11 用完了，则答案取到了 S 。否则，该策略构造出的序列 a 的每个位置上的前缀和都进了位，故答案取到了另一个上界 n 。

故当 $a_i \leq 11$ 时，有

$$F(c) = \min(S, n).$$

进一步地，该策略也可以应用在特殊性质 $a_i \neq 1$ ，即上式同时对 $a_i \neq 1$ 的子任务成立。

记 $h(m, s)$ 为，有多少个本质不同的 A 的子集，其元素个数为 m ，其元素和为 s 。 h 可以通过简单递推在 $O(n^2)$ 的时间复杂度内求得，答案即为 $\sum_{m,s} h(m, s) \min(\lfloor \frac{s}{10} \rfloor, m)$ 。

结合 $n \leq 40$ 的算法，可以获得 44 分。

2.3 正解

当 $1 \in A$ 时，我们无法保证 a 中的每个 1 一定能使对应位置的前缀和进位。例如 $A = \{1, 12, 12, 12, 12, 12\}$ ，此时答案并不能卡到集合大小上界 n 。

考虑找到一个更紧的、关于能够进位的数的个数的上界。

若 A 中仅存在偶数和 1，所有 1 必须两两配对才能完成进位，此时能够进位的数的个数的上界为 $n - \lceil \frac{c_1}{2} \rceil$ 。

由 1 能进位当且仅当前缀和个位数是 9，并且仅有奇数能改变前缀和奇偶性，我们可以将 1 和其它奇数两两配对，使得仅有 $\max(c_1 - (c_3 + c_5 + c_7 + c_9 + c_{11}), 0)$ 个 1 无法进位，而这些 1 必须两两配对来完成进位。

考虑如下的逐位构造方案策略：

1. 若前缀和个位 < 8 ，且 12 尚未用完，将 12 作为 a 的下一个数。
 - 若 12 已用完，使用策略 π 完成剩下的部分。
2. 若前缀和个位是 8：
 - (a) 任选 $[2, 10]$ 内的偶数作为 a 的下一个数。
 - (b) 否则将 11 作为 a 的下一个数。
 - (c) 否则任选 > 1 的奇数作为 a 的下一个数。
 - (d) 否则将 1 作为 a 的下一个数。
3. 若前缀和个位是 9：
 - (a) 若 1 尚未用完，将 1 作为 a 的下一个数。
 - (b) 否则任选 $[3, 9]$ 内的奇数作为 a 的下一个数。
 - (c) 否则将 11 作为 a 的下一个数。

现在我们分析 $F(c)$ 在什么情况下无法取到原本的上界。可以发现 $F(c) < \min(S, n)$ 当且仅当上述策略执行到了 2.(d)，这是一个仅剩偶数和 1 的子问题。由上面的叙述， $n' - \left\lceil \frac{c'_i}{2} \right\rceil$ 是该子问题的能够进位的数的个数的上界，于是我们可以推出：

$$F(c) = \min\left(S, n - \left\lceil \frac{\max(c_1 - (c_3 + c_5 + c_7 + c_9 + c_{11}), 0)}{2} \right\rceil\right).$$

现在考虑如何计算答案。

定义 $h_0(m, s)$ 表示本质不同的仅包含偶数的 A 的子集个数，且其元素个数为 m ，元素和为 s 。

定义 $h_{-1}(m, s)$ 表示本质不同的仅包含大于 1 的奇数的 A 的子集个数，且其元素个数为 m ，元素和为 s 。

此处 h_0 和 h_{-1} 的计算类似上文中的 h ，可以 $O(n^2)$ 。

记 1 的出现次数为 d_1 ，最终答案为

$$\sum_{d_1, m_0, s_0, m_{-1}, s_{-1}} h_0(m_0, s_0) h_{-1}(m_{-1}, s_{-1}) \min\left(\left\lfloor \frac{s_0 + s_{-1} + d_1}{10} \right\rfloor, m_0 + m_{-1} + d_1 - \left\lceil \frac{\max(d_1 - m_{-1}, 0)}{2} \right\rceil\right)$$

我们首先合并 1 与 h_{-1} 。定义 $h'(m', s')$ 为本质不同的仅包含奇数的 A 的子集个数，要求其仅包含奇数，其元素个数减去“多余的 1”个数除以 2 之后为 m' ，元素和为 s' 。那么其计算方法为，对每个 m_{-1}, s_{-1}, d_1 都进行

$$h'(m_{-1} + d_1 - \left\lfloor \frac{\max(d_1 - m_{-1}, 0)}{2} \right\rfloor, s_{-1} + d_1) \leftarrow h_{-1}(m_{-1}, s_{-1}).$$

$h'(m', s')$ 的计算，可以讨论 d_1 和 m_{-1} 的大小和奇偶性之后通过差分在 $O(n^2)$ 的时间内求得。于是原问题转化为计算

$$\sum_{m', s', m_0, s_0} h'(m', s') h_0(m_0, s_0) \min\left(\left\lfloor \frac{s' + s_0}{10} \right\rfloor, m' + m_0\right).$$

对 (m', s') 和 (m_0, s_0) 都有 $(\lfloor \frac{s}{10} \rfloor - m, s \bmod 10)$ 相同的项对答案的贡献是类似的，这些项由于第二维 ≤ 9 于是只有 $O(n)$ 个，暴力枚举计算即可 $O(n^2)$ ，可以通过此题。

3 总结与展望

本题主要考察选手通过观察性质推导出 $f(A)$ 的简单形式并结合动态规划等算法解决问题的能力。

出题人还思考了 $n > 10000$ 与 $a_i \leq 13$ 两种拓展方向，但未得到复杂度较优的做法，欢迎有兴趣的同学与我交流。

4 致谢

感谢王浩旭同学与我关于本题命制的讨论。

感谢集训队员钟自厚、李劲逸对本题命制的启发与对本题的检验。