《彩虹航线》命题报告

钟自厚

2023 年 11 月 22 日

目录

1 题目描述

1.1 形式化题意

给定二分图 $G=(A\cup B,E)$ 和不小于最大度数的整数 k，每条边给出大小为 k 的候选颜色集合，求一种边染色方案。

1.2 数据范围

记 $n=|A|=|B|, m=|E|$。

保证 $1\le n,k\le 150, 1\le m\le n^2$。

保证二分图没有重边（但下面给出的解法不依赖这一条件）。

1.3 子任务

1.（1 分）$k=1$
2.（2 分）$k=2n$
3.（11 分）$k=2$
4.（37 分）$m=n^2, k=n+1$
5.（21 分）$m=n^2$
6.（28 分）无特殊限制。

2 解题思路

2.1 定义说明

对于图 G，记 $V(G)$ 为它的点集，二元组集合 $E(G)$ 为它的边集（若 G 是有向图则二元组有序），$L(G)$ 为它的**线图** (Line Graph)，$d_G^+(v)$ 为点 v 的出度。

记 $\chi(G)$ 为 G 的**色数** (Chromatic Number)。记 $\chi'(G)=\chi(L(G))$ 为 G 的**边色数** (Edge Chromatic Number / Chromatic Index)。

我们给出**列表着色** (List Coloring) 的定义。设对每个点 $v\in V(G)$ 有由自然数构成的集合或列表 S_v，一个列表着色是映射 $c:V(G)\to S_v$ 使得 $\forall(v_1,v_2)\in E(G), c(v_1)\ne c(v_2)$。记 G 的**列表色数** (List Chromatic Number) $\chi_\ell(G)$ 为最小大小使得只要所有集合大小不小于 $\chi_\ell(G)$ 则一定存在列表着色。类似于边色数，记 G 的**边列表色数** (Edge-List Chromatic Number) 为 $\chi'_\ell(G)=\chi_\ell(L(G))$。

有向图 D 的**核** (Kernel) 为 $K\subseteq V(D)$ 满足：

- $\forall v_1,v_2\in K,(v_1,v_2)\notin E(D)$
- $\forall v\notin K,\exists k\in K,(v,k)\in E(D)$

2.2 核的性质

我们考虑如何利用 k 不小于最大度数的条件。

引理 1. 设 G 为无向图，$\{S_v\}_{v\in V(G)}$ 为染色列表。若 G 存在定向 D 使得 $\forall v\in G, d^+_G(v) < |S_v|$ 且 D 的每个导出子图都有核，那么 G 可以用 $\{S_v\}$ 染色。

证明. 对 $|V(G)|$ 归纳。显然 $|V(G)|=1$ 时引理成立。

对于 $V(G)>1$，设对所有点的数量小于 $|V(G)|$ 的图引理成立。取 α 为任意出现在至少一个列表的颜色，考虑所有对应列表包含 α 的点导出的子图，根据假设存在 U 为其核。

设 G' 为 $G\backslash U$，$S'_v=(S_v\backslash\{\alpha\})_{v\in G'}$。对于 $v\in V(G')$，若 $\alpha\notin S_v$ 则 $d^+_{G'}(v)<|S_v|=|S'_v|$，否则根据核的定义 $d^+_{G'}(v)<d^+_G(v), |S_v|=|S'_v|+1 \implies d^+_{G'}(v)<|S'_v|$。

给所有 U 中的点染上 α，根据归纳假设 G' 也有列表着色，因此引理成立。 □

下面我们考虑如何找到定向 D 符合引理 1 的假设。

2.3 用边染色方案构造定向

设 $G=(X\cup Y, E(G))$ 为二分图，c 是 G 的一种边染色方案（求解 c 是经典问题，这里不再讨论）。定义对 $L(G)$ 的定向 $D(G,c)$ 为，对于任意两个在 G 中共享顶点的边 e_1, e_2，不妨设 $c(e_1)<c(e_2)$，用如下方式给 $(e_1,e_2)\in E(L(G))$ 定向：

- 若 e_1, e_2 只在 X 共享顶点，定向为 $e_1\to e_2$。
- 若 e_1, e_2 只在 Y 共享顶点，定向为 $e_2\to e_1$。
- 若 e_1, e_2 是重边，那么 $L(G)$ 会产生两条重边，分别定向为 $e_1\to e_2$ 和 $e_2\to e_1$。

引理 2. 对于二分图 G，设 $k=\chi'(G)=\max_{v\in V(G)} d_G(v)$，$c: E(G)\to[1,k]\cap\mathbb{Z}$ 为一种染色方案，那么 $\forall v\in V(D(G,c)), d^+_{D(G,c)}(v)<k$。

证明. 考虑 $e\in V(D(G,c))$，设 $c(e)=\alpha$，$e'\in V(D(G,c))$ 为与 e 共享顶点的边且 (e,e') 定向为 $e'\to e$，根据 $D(G,c)$ 的构造总是有 $c(e')\in\{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,k\}$，所以 $d^+_{D(G,c)}(e)\le|\{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,k\}|<k$。 □

2.4 与稳定婚姻的联系

接下来，我们用**稳定婚姻** (Stable Marriage / Stable Matching) 模型辅助我们完成证明。我们先明确稳定婚姻的定义：对于二分图 G，每个点 $v\in V(G)$ 有对所有邻边的排列称为偏好列表 L_v，则总是存在稳定匹配 $M\subseteq E(G)$（求解 M 是经典问题，这里不再讨论）。匹配 M 是稳定的当且仅当 $\forall e\notin M, \exists e'\in M$ 且 e, e' 共享顶点 $v\in V(G)$，v 相比 e 更偏好 e'。

引理 3. 对于二分图 $G=(X\cup Y, E(G))$，设 $k=\chi'(G)=\max_{v\in V(G)} d_G(v)$，$c: E(G)\to[1,k]\cap\mathbb{Z}$ 为一种染色方案，那么 $D(G,c)$ 的每个导出子图都有核。

证明. 在 $V(G)$ 上定义偏好列表，若 $(e_1, e_2) \in E(L(G))$ 定向为 $e_1 \to e_2$，那么对于 $v \in V(G)$ 令 v 相比 e_1 更偏好 e_2。求解 $V(G)$ 的稳定婚姻就可以给出 $D(G, c)$ 的核 W，对于导出子图也是类似的。

我们反证 W 必定是核。若 W 不是核，则 $\exists e \notin W$ 满足 e 不存在到 $W \in V(L(G))$ 中的点的出边。显然 e 与 W 中的至少一个边 e_1 共享顶点（否则不是极大匹配）v，那么 $D(G, c)$ 中有定向 $e_1 \to e$，且 v 相比 e_1 更偏好 e。若 e 不与 W 中的另一个边 e_2 共享顶点则 W 不是稳定匹配，否则同理可推出 e 与 e_2 的公共顶点 w 相比 e_2 更偏好 e，W 仍然不是稳定匹配。 □

于是我们构造的定向 $D(G, c)$ 符合引理 1 的假设。题目保证 $k \geq \max_{v \in V(G)} d_G(v)$，说明一定有解。

2.5 子任务解法

本题子任务循循善诱，引导选手思考，将分数从 3 分逐渐优化到 100 分。

子任务 1, 2 是平凡的。

子任务 3 对应二分图是若干个环与链的情况，可以转化为 2-SAT 问题。这个子任务提示选手一定有解。

子任务 4 开始与正解有关，对应 Dinitz 猜想的弱化版。

子任务 5 对应 Dinitz 猜想，与正解的区别是可以直接给出定向 $D(G, c)$。

子任务 6 对应正解，即 Galvin 定理。

2.6 实现细节

上述引理及定理的证明也给出了答案的具体构造方式，实现时模拟一遍即可。

3 命题总结

3.1 题目背景

数学家 Jeff Dinitz 在 1979 年提出了一个有趣的猜想 [1]：*对于 n 阶拉丁方，每个格子给出大小为 n 的候选数集合，则总是存在给每个格子填数的合法方案。*

1993 年，Jeannette Janssen 解决了 Dinitz 猜想的弱化版 [2]，即每个格子给出大小为 $n+1$ 的集合。1995 年，Fred Galvin 证明了 Dinitz 猜想 [3]，并且将猜想推广到任意二分图。

对本题感兴趣的读者可以进一步了解一般图上的推广，即著名的 Open problem List Coloring Conjecture，该猜想指出 $\chi'(G) = \chi'_\ell(G)$。Jeff Kahn 在 2000 年证明了这一猜想渐进成立 [4]。

3.2 命题思路

笔者在命制本题时发现列表着色模型基本没有在国内 OI 中出现，所以引进了这一有趣的问题。希望算法竞赛未来可以出现更多有趣的图论题。

3.3 总结

总的来说，本题有一定思维难度，是一道不可多得的好题。

通过本题需要选手熟知常见的图论模型（图的核及其性质、稳定婚姻、二分图边染色构造等），并利用 k 不小于最大度数的条件将这些模型联系起来。

预计有 5 名集训队选手通过本题。

3.4 致谢

感谢国家集训队教练提供的互测平台。

感谢崔隽章、李劲逸同学复核本命题报告，并与我探讨数据生成方式。

参考文献

[1] P. Erdos, A. L. Rubin, and H. Taylor, “Choosability in graphs,” *Congr. Numer*, vol. 26, no. 4, pp. 125–157, 1979.

[2] J. Janssen, “The dinitz problem solved for rectangles,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 29, no. 2, pp. 243–249, 1993.

[3] F. Galvin, “The list chromatic index of a bipartite multigraph,” *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 63, no. 1, pp. 153–158, 1995.

[4] J. Kahn, “Asymptotics of the list-chromatic index for multigraphs,” *Random Structures & Algorithms*, vol. 17, no. 2, pp. 117–156, 2000.

[5] L. W. Beineke, “Characterizations of derived graphs,” *Journal of Combinatorial theory*, vol. 9, no. 2, pp. 129–135, 1970.

[6] D. Gusfield and R. W. Irving, *The stable marriage problem: structure and algorithms*. MIT press, 1989.

[7] A. Blumenthal, “On galvin’s theorem and stable matchings,” Ph.D. dissertation, Auburn University, 2016.