棋盘-解题报告

简要题意

给定一个无限大的棋盘，你需要在上面保留至多 X 个关键点（其它的点删去），然后对于每个点算出 $(1,1)$ 走到该点且只能往下或者往右并且只能经过没被删除的点的方案数，设构成的可重集为 S，有 Q 次询问，每次给定一个正整数 k，要求你选出 S 中至多 Y 个元素使得它们的和为 k，保证 $k < 10^K$。

数据范围

Subtask	分值	$X=$	$Y=$	$K=$	特殊性质
1	5	10^3	340	2	无
2	10	10^3	340	12	无
3	10	10^3	340	100	无
4	10	990	310	100	数据随机
5	10	1050	260	100	无
6	10	1050	240	100	无
7	20	980	260	100	$Q=1$
8	25	960	240	100	无

其中，数据随机的方式是：k 在 $[1,10^K)$ 中等概率随机。

对于所有数据，保证 $1 \le Q \le 10^4$。

解题过程

为了方便，令 $m=10^K$。

算法1.

考虑直接拉出来一条链，然后就做完了。

此时 $X=Y=m$，可以通过 Subtask1。

算法2.

一条链不够，我们可以拉出几条链（或者拉出一个矩形）。

具体的，选定 x,y，然后标记 $(1,1)$ 到 (x,y) 中的所有点，其中 x 较小 y 较大，然后直接暴力拼凑。

可以通过 Subtask2。

算法3.

考虑构造一个棋盘使得对于 (i,i) 位置对应的值为 2^{i-1}，图长这样：

1	1		
1	2	2	
	2	4	4
		4	8

于是就直接二进制拆分就行了，此时 $X=3\log_2 m, Y=\log_2 m$，可以通过 Subtask3。

可能可以通过一些乱搞通过 Subtask 4，因为 $\lfloor 3\log_2 m\rfloor = 996$，可以在前面加一点东西或者后加一点东西使得和更大些。

算法4.

二进制拆分的 Y 有点大，我们可以改变进制来使得 Y 更小一点。

具体的，有以下两种构造方案：

分别是六进制构造和三进制构造。

1	1	1		
1	2	3		
1	3	6	6	6
		6	12	18
		6	18	36

1	1	1		
1	2	3	3	
1	3	6	9	9
	3	9	18	27
		9	27	54

其中三进制构造中 $(i,i)\ (i>1)$ 的值为 $2\times 3^{i-2}$，而 $(i,i+1)$ 和 $(i+1,i)$ 的值为 3^{i-1}。

对于六进制，对应的有 $X=8\log_6 m, Y=2\log_6 m$，可以通过 Subtask5。

对于三进制，对应的有 $X = 5\log_3 m, Y = \log_3 m$，可以通过 Subtask6。

算法5.

观察一下上述做法，可能还有其它的进制做法，但都存在一个共同的问题：X 有点大。

考虑构造如下棋盘：

1	1	1		
1	2	3	3	
	2	5	8	8
		5	13	21
			13	34
				34

观察一下，这个棋盘跟斐波那契数列有关。

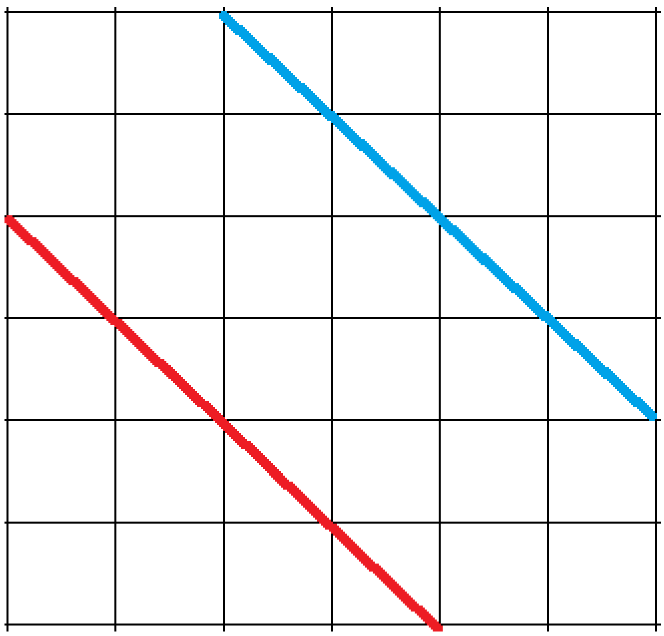
根据相关结论，斐波那契数列第 n 项的大小是 $O(\phi^n)$ 级别的，其中 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以有 $X = 4\log_\phi m$ 。此时通过计算发现 X 满足了题目要求。

那 Y 如何满足题目要求呢？

注意到 $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$，所以如果没选 f_i 并且同时选了 f_{i-1}, f_{i-2}，那么我们可以放弃 f_{i-1}, f_{i-2} 并且选 f_i。

因为 $f_{480} > m$，所以不难发现我们直接从大到小贪心就能保证最多选出 $\frac{\log_\phi m}{2}$ 个，也就是说此时 $Y = \frac{\log_\phi m}{2}$，通过计算发现此时 Y 也满足题目的要求。

笔者有一个没那么严谨的方法来证明 X 最小值为 $2\log_\phi m$（也就是这种构造的 X），如果有更好的方法或者觉得这个证明有问题，欢迎来跟笔者交流。



如图，有两条与网格中的线夹角为 45° 的平行线，通过调整可以说明如果想让能够表示的数尽量的大，那么最终选择的格子一定是这两条线之间的那些。

根据实践，二进制时相当于两条直线间隔 $2\sqrt{2}$（不妨假设格子的长宽为 1），三进制时相当于两条直线间隔 $3\sqrt{2}$，而斐波那契进制时相当于两条直线间隔 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$，感受一下，这是一个单峰函数（笔者并不会证明），所以可以得出结论，X 的最小值为 $2\log_\phi m$。

参考文献：

百度百科-斐波那契数列

CF715D