线段树

命题人：北京大学 蒋凌宇 (jiangly)
jly@stu.pku.edu.cn

题目大意

- 给定一棵形态任意的线段树，大小为 N（共 $2N-1$ 个结点），每个结点维护了区间和。
- 给定 M 个区间 $[L_i, R_i)$。
- 选择一个结点的子集（共 2^{2N-1} 种），求有多少种能够通过集合中的结点推出所有 M 个区间的和，对 998 244 353 取模。
- 数据范围：$N, M \le 2 \cdot 10^5$。

算法 1

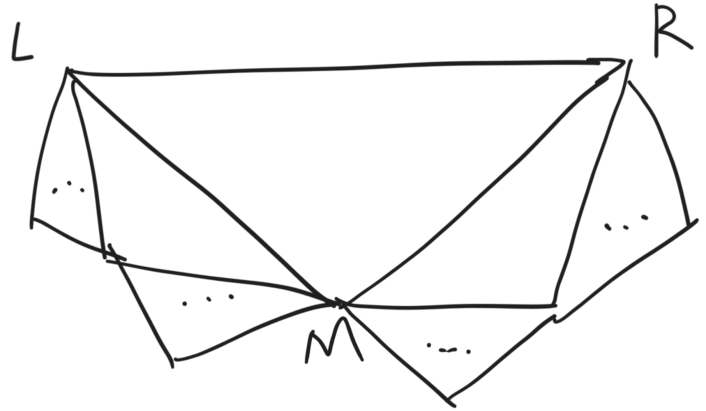
- 测试点 1 满足 $N = 3$ 和特殊性质，容易发现在该限制下只有两组可能的数据且它们本质相同。
- 总共只有 32 种可能的方案，通过手玩或者高斯消元可以求出答案为 14。
- 期望得分：5。

算法2

- **关键性质：**把每个结点看成一条边 (l, r)，则能够知道区间和当且仅当区间两端点连通。
- **证明：**考虑前缀和，如果知道 $S_a - S_b$ 和 $S_b - S_c$，则能知道 $S_a - S_c$。
- 暴力枚举选择的边的子集。
- 时间复杂度 $O\left(2^{(2N-1)}(N + M)\right)$。
- 期望得分：10。

算法 3

- 特殊性质：给定的区间是所有前缀，也就是需要能够求出所有区间的和。
- **关键性质：**把每个结点看成一条边形成的图实际上是 $N+1$ 边形的三角剖分。在这个图上存在一个分治结构。对应到线段树上其实就是子树。
- 要让整个图连通，每棵子树只有两种可能：要么子树已经连通，要么子树分为包含 L 和 R 的两个连通块。
- DP，时间复杂度 $O(N)$。
- 期望得分：15。



算法 4

- 特殊性质：$M = 1$。
- DP，只需记录 L, R 和两个区间端点的连通性，状态和合并代价都是常数。
- 时间复杂度 $O(N)$。
- 期望得分：10。

算法 5

- 特殊性质：$M \leq 5$。
- 仍然考虑 DP，此时要记录的是关于 M 个区间的信息，时间复杂度 $O\big(Nf(M)\big)$。其中 $f(M)$ 是关于 M 的一个指数函数。
- 根据具体的复杂度和实现，期望得分在 10 至 30 不等。

算法 5

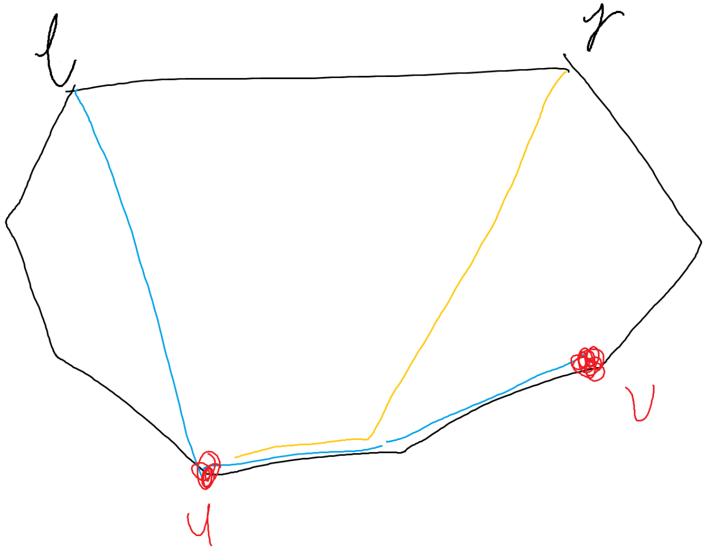
- 一个 $O(N2^M)$ 的算法如下：
- 先考虑 $M=1$ 的情况，我们设 DP 值如下：
  - $g(x)$ 表示 l 和 r 连通，且 L,R 未被分隔的方案数。
    - 未被分隔指的是：在子树外的边全都选择的情况下，L 和 R 有连通的可能，即要么 $[L,R)$ 被 $[l,r)$ 包含，要么 $[L,R)$ 和 $[l,r)$ 不相交，要么 $[L,R)$ 和 $[l,r)$ 相交且子树内的端点与 l,r 中的至少一个连通。
  - $f(x,0)$ 表示 l 和 r 不连通，且 $[l,r)\cap[L,R)$ 已知的方案数。
  - $f(x,1)$ 表示 l 和 r 不连通，且 $[l,r)\setminus[L,R)$ 已知的方案数。
- $M>1$ 的情况，将 $f(x,\star)$ 的状态改为 2^M 种即可。

算法 5

- 如果你写了不算优秀的指数级算法，但加上了足够的剪枝，也有可能通过。
- 可能你的复杂度变成了 $O(NM)$ 或 $O(NM^2)$。

算法 6

- **关键性质：** 把每个结点看成一条边得到的图是平面图。若 l,r 不连通，则和 l 连通的点都在和 r 连通的点的左边。
- 设子树连通的方案数为 $g(\star)$，子树 $\leq x$ 的点和 l 连通、剩余点和 r 连通的方案数为 $f(\star,x)$。
- 事实上并不是所有的状态都可以这样表示，比如可能存在某个点和 l 和 r 都不连通。
- 后面会说明可以等价地转换到这种表示。



算法 6

- 设子树连通的方案数为 $g(\star)$，子树 $\le x$ 的点和 l 连通、剩余点和 R 连通的方案数为 $f(\star,x)$。
- 如果 l 到 r 有边：

$$g(lc)\cdot g(rc)\to g(u)$$
$$g(lc)\cdot f(rc,y)\to g(u)$$
$$f(lc,x)\cdot g(rc)\to g(u)$$
$$f(lc,x)\cdot f(rc,y)\to g(u)$$

- 在最后一个转移中，会产生一个包含 m 的连通块，它包含从 $x+1$ 到 y 的点。如果存在一个目标区间被分隔开，则不能进行这个转移。如果没有，那么我们可以认为 m 和 l,r 连通，符合 g 的定义。

算法 6

- 设子树连通的方案数为 $g(\star)$，子树 $\leq x$ 的点和 l 连通、剩余点和 r 连通的方案数为 $f(\star,x)$。
- 如果 l 到 r 没有边：

$$g(l)\cdot g(r)\to g(u)$$
$$g(l)\cdot f(r,y)\to f(u,y)$$
$$f(l,x)\cdot g(r)\to f(u,x)$$
$$f(l,x)\cdot f(r,y)\to f(u,x/y)$$

- 同理，如果存在一个目标区间两端点被分隔，则不能进行最后一种转移。否则我们可以认为 m 和 l,r 的**其中一个**连通也不影响答案。也就是说最后一种转移到 x **或者** y 都是正确的。

算法 6

- 将转移可行性的判断优化到 $O(1)$，再套用类似子树背包的复杂度分析，可以得到 $O(N^2)$ 的算法。
- 如果实现不够优秀，可能得到 $O(N^4)$ 或者 $O(N^3)$ 的时间复杂度。
- 只把给定区间的端点作为关键点可以做到 $O(NM^2)$ 或是 $O(NM)$。
- 期望得分：40 至 70。

算法 7

- **关键性质：** 算法 6 中的 DP 可以转移 $f(l,x)\cdot f(r,y)$ 当且仅当覆盖 $[x,x+1)$ 和 $[y,y+1)$ 的区间集合相同。
- 那么下标可以被分成若干个等价类，于是就可以把状态直接改为这个等价类而不是划分点。
- 现在的 DP 就很容易用支持区间乘法的线段树合并优化。
- 时间复杂度 $O(N\log N)$。
- 期望得分：100。

算法 8

- 不使用线段树合并，用哈希表维护 DP 值以及总和、乘法标记，然后启发式合并。
- 时间复杂度 $O(N\log N)$。
- 但是可能出现除以 0 的情况，需要特殊处理。

谢谢大家！